Mathe Basics für's Studium

Grundlagen zur Mathematikvorlesung
eines betriebswirtschaftlichen Studiums

von Stefan Schmidt

Version: 13 Jan. 05

Inhaltsverzeichnis

TEIL 2

Mathe Basics für's Studium

Vorblabla

Dieses Skript ist aus dem VWA Mathe Brückenkurs und der VWA Mathevorlesung heraus entstanden. Zunächst habe ich nur meine handschriftlichen Krakeleien in für mich les- und nachvollziehbare Form bringen wollen. – Bis dann dieses Dokument daraus gewachsen ist! Wichtig war mir dabei, die in üblicher Literatur oft sehr mathematischen Erklärungen und Definitionen in eine - für mich als Mathe-Laien - verständliche und nachvollziehbare Form zu bringen.

Die aktuellste Version dieses Dokuments findet man unter: http://people.freenet.de/vwa-files/
Feedback oder Optimierungsvorschläge nehme ich gerne entgegen unter: skschmidt_ffm@gmx.de

Was bietet dieses Skript?

Das Skript besteht im Wesentlichen aus zwei Teilen:

Im ersten Teil wird der Inhalt des Mathematikunterrichts der gymnasialen Oberstufe aufgearbeitet - dies entspricht im Groben den Veranstaltungen eines Matheaufbaukurses bzw. Mathebrückenkurses. Dabei wurde insbesondere auf eine detaillierte Erklärung des Stoffes wertgelegt, die in den genannten Veranstaltungen unter dem oftmals vorherrschenden Zeitdruck nicht möglich ist. Dabei kann es Überschneidungen mit dem Stoff der Vorlesung geben (d.h. manche im ersten Teil behandelten Themen sind Bestandteil des Vorlesungsstoffes und der Klausur!)

Der zweite Teil behandelt vorwiegend klausurrelevanten Stoff der Mathevorlesung I an der VWA, der im Brückenkurs nicht abgedeckt wird.

Es wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Jedoch kann man davon ausgehen, dass alle relevanten Grundlagen für die Mathematikvorlesungen eines betriebswirtschaftlichen Studiums berücksichtigt wurden. Alle Erklärungen sind weitgehend "unmathematisch", also speziell für Nichtmathematiker gehalten und dadurch (hoffentlich) dem Laien und Studieneinsteiger verständlicher, als die übliche Mathematikliteratur. Es wird auch kein Anspruch auf wissenschaftliche Korrektheit erhoben, doch sind die Erklärungen in Prosa oft greifbarer als irgendwelche komplexen Herleitungen einer Formel. Die Rechenwege und Ergebnisse entsprechen jedenfalls dem "Lehrbuch".

Für wen ist dieses Skript?

Also, wenn ich dieses Skript zu Schulzeiten gehabt hätte, wäre mein Mathelehrer vermutlich nicht an mir verzweifelt ;-) Als Referenz, Begleitung oder Nachbearbeitung eines Brückenkurses sollte es allemal gut sein! Auch für ein "normales" BWL Studium an Uni oder FH sind die enthaltenen Themen nach meiner Erfahrung (6 Semester Uni BWL) mehr als brauchbar. Zudem werden vor allem im 2. Teil fast alle Klausurthemen eines BWL Studiums abgedeckt (Mathe I). Die Verwendung des Skripts beschränkt sich demnach nicht nur auf die Studiengänge der VWA, wobei natürlich besonders die für die VWA relevanten Mathethemen abgedeckt werden.

TEIL 1

Mathe Aufbaukurs

(enthält auch klausurrelevanten Stoff)

1 Basic Basics

1.1 Definition der Zahlenmengen

Die Zahlenmengen sind für das Studium nicht weiter relevant. Jedoch sollte man eine ungefähre Vorstellung haben, was die einzelnen Zahlenmengen per Definition abbilden. Manche Lösungsmengen oder Lösungsintervalle (Intervall = Zahlenbereich, z.B. -2 bis +15) bedienen sich der Abkürzungen bestimmter Zahlenmengen (meist Q oder R).

N (natürliche Zahlen = alle ganzen positive Zahlen ohne Brüche)

N_0 (entspricht N inklusive der 0)

Z (ganze Zahlen = natürliche Zahlen einschließlich 0 und negative Zahlen)

Q (rationale Zahlen = ganze Zahlen und Brüche, also endliche oder periodische Dezimalzahlen)

R (reelle Zahlen = rationale Zahlen einschließlich irrationale Zahlen, also der gesamte Zahlenstrahl)
(irrationale Zahlen: z.B. π, e = Eulersche Zahl oder $\sqrt{-1}$)

Eine typische Lösungsmenge einer Funktion wäre z.B. L = Q / 4
(was bedeutet, daß alle rationalen Zahlen außer der 4 in die Funktion eingesetzt werden können)

1.2 Rechenoperationen werden in folgender Reihenfolge aufgelöst

Wenn Klammern vorhanden sind:

1) Klammern auflösen (von innen nach außen)

Innerhalb von Klammern oder wenn keine Klammern vorhanden sind:

1) Potenzen ausrechnen, Wurzeln ziehen
2) Multiplikation, Division
3) Addition, Subtraktion

Eselsbrücke:
Punktrechnung (Multiplikation, Division) **vor Strichrechnung** (Addition, Subtraktion)**!**

1.3 Allgemeine Rechenregeln für Multiplikation und Division

$$-(-x) = x$$

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$$

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$$

$$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$\frac{0}{y} = 0 \;*$$

$$\frac{x}{0} = \text{unzulässig da nicht definiert!}**$$

> Ist ein Produkt gleich Null $(x \cdot y = 0)$ so ist mindestens ein Faktor gleich Null!
> (x oder y muß also 0 sein sonst wäre das Ergebnis nicht 0)

*Null durch eine Zahl darf man teilen:
Wenn ich "nichts" habe, kann ich "nichts" an mehrere Leute verteilen - sie haben dann alle "nichts" bekommen.

**Durch Null darf man nicht teilen:
Wenn ich einen Kuchen habe und teile den durch "niemanden", müsste sich der Kuchen in "nichts" auflösen. D.h. ich kann zwar den Kuchen an viele oder wenige Leute verteilen, aber eben nicht an "niemanden", denn irgendwo muss der Kuchen ja bleiben (aufessen gilt nicht! ;-).

Beispiele für Vorzeichenregelung bei Addition und Subtraktion:

$$3 + (-8) = 3 - 8 = -5$$

$$((1+6) - (2+3)) + 4 = (7-5) + 4 = 2 + 4 = 6$$

Beispiele für Vorzeichenregelung bei Multiplikation und Division:

$$2 + 3 \cdot (4 \cdot 5 + 6 - 8) = 2 + 3 \cdot (18) = 56$$

$$2 + 3 \cdot (4 \cdot 5 + 6 - 8)^2 = 2 + 3 \cdot (18)^2 = 2 + 3 \cdot 324 = 2 + 972 = 974$$

$$\left[(\sqrt{9} - 2) \cdot 5\right] + 7 = \left[(3-2) \cdot 5\right] + 7 = 5 + 7 = 12$$

$$4 \cdot (3x - 1) + 5x - 4 \cdot (3+1) \cdot 3x = 12x - 4 + 5x - 4 \cdot 4 \cdot 3x = 12x - 4 + 5x - 48x = -31x - 4$$

Bei der Multiplikation mit Klammern muss jeder Wert einzeln ausmultipliziert werden!

2 Bruchrechnung

Bei der Bruchrechnung handelt es sich um Division von (zwei) Zahlen. Dabei ist das Ergebnis immer eine endliche Zahl (z.B. 3,4783416) oder eine Zahl mit Periode 3,3333...). Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs wird *Zähler*, die Zahl unterhalb des Bruchstrichs *Nenner* genannt.

$$a \div b = \frac{a}{b} = \frac{Z\ddot{a}hler}{Nenner} \qquad \text{Bedingung}: b \neq 0$$

2.1 Rechenregeln für Brüche:

Erweitern:
Oben und unten (Zähler und Nenner) wird mit der selben Zahl multipliziert.
Der eigentliche Wert des Bruchs ändert sich dadurch nicht!

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot e}{b \cdot e} \qquad \text{Bedingung}: b \neq 0,\ e \neq 0$$

Beispiel:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Kürzen:
Gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner finden und durch diese teilen.
Der eigentliche Wert des Bruchs ändert sich dadurch nicht!

Beispiele:

$$\frac{2}{8} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{4 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{12}{18} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \frac{2}{3}$$

Multiplikation von Brüchen:
Zähler wird mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b} \qquad \text{(Anmerkung: } c \text{ kann auch als } \frac{c}{1} \text{ geschrieben werden)}$$

Division von Brüchen:
Zwei Brüche werden dividiert indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot c} = \frac{a}{b \cdot c} \qquad \text{(Anmerkung: } c \text{ kann auch als } \frac{c}{1} \text{ geschrieben werden)}$$

Addition/Subtraktion von Brüchen:

1) Nenner stimmen überein:
⇨ Nenner bleibt bestehen und Zähler werden addiert/subtrahiert

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$$

Eselsbrücke:
¼ Liter plus ¼ Liter gibt 2/4 Liter!

Achtung!

$$\frac{3+4}{3} \neq \frac{\cancel{3}+4}{\cancel{3}} \neq 4$$

Niemals aus Summen und Differenzen kürzen!

2) Nenner stimmen nicht überein:
⇨ durch Erweitern oder Kürzen wird ein gleicher Nenner erzeugt

$$\frac{2}{7} - \frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 7} - \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{10}{35} - \frac{21}{35} = \frac{10-21}{35} = \frac{-11}{35} = -\frac{11}{35}$$

In diesem Beispiel ist es kein Zufall, dass 5 mit 7 und 7 mit 5 multipliziert wurde.
Wenn man die Nenner über kreuz miteinander multipliziert, erhält man nämlich immer einen gleichen (gemeinsamen) Nenner.

Noch ein Beispiel:
Der erste Bruch wird mit 7, der zweite mit 21 und der dritte Bruch mit 3 erweitert!

$$\frac{7}{3} - 2 + \frac{1}{7} = \frac{7}{3} - \frac{2}{1} + \frac{1}{7} = \frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 21}{1 \cdot 21} + \frac{1 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{49}{21} - \frac{42}{21} + \frac{3}{21} = \frac{49-42+3}{21} = \frac{10}{21}$$

2.2 Übungen zu Bruchrechnung

Brüche kürzen:

$$\frac{-4}{-2} =$$

$$\frac{9 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 6 \cdot 8} =$$

$$\frac{2 \cdot (x-5)}{(x-5)^2 \cdot 6} =$$

$$\frac{3+4}{4} =$$

Brüche erweitern:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{4} =$$

$$-\frac{(1-3)}{2} \cdot \frac{(2+1)}{4} =$$

$$2 \div 3 =$$

$$\frac{3}{8} \div \frac{3}{4} =$$

$$\frac{3}{5} \div \frac{2-3}{8} =$$

$$\frac{1}{17} \cdot 3 =$$

$$\frac{2}{15} \div 3 =$$

Brüche addieren/subtrahieren:

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{3} =$$

$$-\frac{-3-6}{3} + \frac{4+8}{4} =$$

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{10} =$$

$$\frac{2+1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{2}{18} + \frac{1}{9} + \frac{7}{18} - \frac{5}{14} + \frac{2}{15} =$$

Doppelbruch:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{2}{6}\right)} =$$

$$\frac{\frac{1-\frac{3}{7}}{5 \cdot \frac{1}{7}}}{\frac{7+\frac{1}{2} \cdot (4+2)}{3}} =$$

2.3 Lösungen zu Bruchrechnung

Brüche kürzen:

$$\frac{-4}{-2}=\frac{-\cancel{4}^{2}}{-\cancel{2}^{1}}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$\frac{9\cdot3\cdot4}{2\cdot6\cdot8}=\frac{9\cdot\cancel{3}^{1}\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}\cdot\cancel{6}^{2}\cdot8}=\frac{9\cdot2}{2\cdot8}=\frac{9\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot8}=\frac{9}{8}$$

$$\frac{2\cdot(x-5)}{(x-5)^2\cdot6}=\frac{2\cdot\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}1}\cdot6}=\frac{2}{(x-5)\cdot6}=\frac{2}{6x-30}$$

$$\frac{3+4}{4}=\text{nicht kürzen! (nur bei Multiplikation oder Division!)}$$

Brüche erweitern:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot4}=\frac{3}{4}$$

$$-\frac{(1-3)}{2}\cdot\frac{(2+1)}{4}=-\frac{-2}{2}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{-1}{1}\cdot\frac{3}{4}=-(-1)\cdot\frac{3}{4}=1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

$$2\div3=\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{8}\div\frac{3}{4}=\frac{3\cdot4}{8\cdot3}=\frac{\cancel{3}\cdot4}{8\cdot\cancel{3}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\qquad\text{(Siehe Rechenregel: mit Kehrwert multiplizieren)}$$

$$\frac{3}{5}\div\frac{2-3}{8}=\frac{3}{5}\div\frac{-1}{8}=\frac{3\cdot8}{5\cdot(-1)}=\frac{24}{-5}=-\frac{24}{5}$$

$$\frac{1}{17}\cdot3=\frac{1}{17}\cdot\frac{3}{1}=\frac{3}{17}$$

$$\frac{2}{15}\div3=\frac{2}{15}\div\frac{3}{1}=\frac{2\cdot1}{15\cdot3}=\frac{2}{45}$$

Brüche addieren/subtrahieren:

$$\frac{3}{7}+\frac{4}{3}=\frac{3\cdot 3}{3\cdot 7}+\frac{7\cdot 4}{7\cdot 3}=\frac{9}{21}+\frac{28}{21}=\frac{9+28}{21}=\frac{37}{21}$$

$$-\frac{3-6}{3}+\frac{4+8}{4}=-\frac{-3}{3}+\frac{12}{4}=-\frac{\cancel{3}^{-1}}{\cancel{3}^{1}}+\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{4}^{1}}=-\frac{-1}{1}+\frac{3}{1}=1+3=4$$

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 5}-\frac{1}{10}=\frac{6-1}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2+1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3\cdot 3}{3\cdot 2}-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{9}{6}-\frac{2}{6}=\frac{9-2}{6}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{2}{18}+\frac{1}{9}+\frac{7}{18}-\frac{5}{14}+\frac{2}{15}= \quad (\text{gemeinsamer Nenner} = 18\cdot 14\cdot 15 = \quad 3780)$$
$$=\frac{2}{18}+\frac{1}{9}+\frac{7}{18}-\frac{5}{14}+\frac{2}{15}=\frac{210\cdot 2}{210\cdot 18}+\frac{420\cdot 1}{420\cdot 9}+\frac{210\cdot 7}{210\cdot 18}-\frac{270\cdot 5}{270\cdot 14}+\frac{252\cdot 2}{252\cdot 15}=$$
$$=\frac{210\cdot 2}{3780}+\frac{420\cdot 1}{3780}+\frac{210\cdot 7}{3780}-\frac{270\cdot 5}{3780}+\frac{252\cdot 2}{3780}=\frac{420+420+1470-1350+504}{3780}=$$
$$=\frac{1464}{3780}=\frac{1464}{3780}$$???

(hier habe ich bisher keine Bestätigung für ein korrektes Ergebnis)

Doppelbruch:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{2}{6}\right)}=\frac{3}{4}\div\frac{2}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}^{1}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{\dfrac{1-\frac{3}{7}}{5\cdot\frac{1}{7}}}{\dfrac{7+\frac{1}{2}\cdot(4+2)}{3}}=$$?????????????????????????

3 Potenzen

Bei den Potenzen handelt es sich eigentlich um die Vereinfachung einer Schreibweise. So wird

$\underbrace{2}_{1} \cdot \underbrace{2}_{2} \cdot \underbrace{2}_{3}$ dargestellt als 2^3,

wobei die Anzahl der zu multiplizierenden Schritte einer Zahl im sog. Exponenten dargestellt wird.

Formale Schreibweise:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot .... \cdot x}_{n-mal}$$

x^n Exponent

Basis

Definitionen:

$$x^0 = 1$$

$$0^n = \text{nicht definiert!}$$

Anmerkung: hier bin ich mir nicht so ganz sicher - eigentlich müsste 0 · 0 · 0 doch definiert sein?
Falls jemand etwas weiß, bitte mailen!

Rechenregeln für Potenzen

3.1.1 Bei gleicher Basis

Multiplikation/Division

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$\left(x^m\right)^n = x^{m \cdot n}$$

Beispiel:

$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^{3+2} = 2^5$ oder $\frac{2^2}{2^4} = 2^2 \div 2^4 = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Addition/Subtraktion

Bei der Addition oder Subtraktion können die Exponenten auch bei gleicher Basis nicht addiert werden!

$$\left.\begin{array}{l} x^m + x^n \neq x^{m+n} \\ x^m - x^n \neq x^{m-n} \end{array}\right\} \text{nicht gleich!}$$

Auch gleicher Exponent lässt sich nicht addieren!

$$\left.\begin{array}{l} 2^n + 3^n \neq 5^n \\ 5^n - 1^n \neq 4^n \end{array}\right\} \text{nicht gleich!}$$

In der Regel kann man dann nicht weiterrechnen. So bleibt z.B. $x^3 + x^4 + x^7$ einfach als Endergebnis stehen, da man die *x* nicht weiter zusammenziehen oder auflösen kann.

3.1.2 Bei gleichen Exponenten

Multiplikation/Division

$$x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$$

$$x^m \div y^m = \left(\frac{x}{y}\right)^m$$

Beispiel: $4^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^2 = 12^2$ oder $\left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{2^3}{1^3} = 2^3 = 8$

3.2 *Sonstige Regeln*

3.2.1 Negativer Exponent

Nimmt man von einer Zahl mit einem Exponenten den Kehrwert, so kehrt sich das Vorzeichen des Exponenten um:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel: $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$ oder auch umgekehrt: $3^4 = \frac{1}{3^{-4}}$

Diese Rechenregel kann bei bestimmten Aufgaben nützlich sein, wenn man nur mit positiven oder explizit negativen Exponenten weiterrechnen möchte!

3.2.2 Brüche im Exponenten und Wurzeln

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$$

Beispiel: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x^1}$ oder: $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

3.3 Übersicht aller Potenzregeln

Zur besseren Übersicht und zum Nachschlagen sind hier nochmals alle Regeln auf einer Seite aufgeführt.

x^n Exponent

Basis

Definitionen:

$$x^0 = 1$$

$$0^n = \text{nicht definiert!}$$

Multiplikation und Division

Gleiche Basis:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$\left(x^m\right)^n = x^{m \cdot n}$$

Gleicher Exponent:

$$x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$$

$$x^m \div y^m = \left(\frac{x}{y}\right)^m$$

Addition und Subtraktion

Geht nicht!

$$\left.\begin{array}{l} x^m + x^n \neq x^{m+n} \\ x^m - x^n \neq x^{m-n} \end{array}\right\} \text{nicht gleich!}$$

Negative Exponenten und Brüche

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Wurzel und Brüche im Exponenten

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$$

3.4 Übungen zu Potenzen

1) $x^0 =$

2) $3^2 \div 3^2 =$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$

4) $\left(5^4\right)^2 \cdot 5^{(-6)} =$

5) $-4^{-2} =$

6) $8^{-2} =$

7) $\frac{2}{3^{-5}} =$

8) $3^2 \cdot 3^5 =$

9) $y^5 \cdot y^{-5} =$

10) $\left(3^3\right)^2 =$

11) $\left(\frac{x^{-4}}{x^{-2}}\right)^{-3} =$

12) $\frac{1}{x^{-3} \cdot y^{-3}} =$

13) $\left(\frac{4}{2}\right)^4 2^2 + 4^3 + 6^4 - 6^3 + 6^2 - \left(2^2 \cdot 5^3\right) + 2^4 =$

14) $\left(\frac{x^3 \cdot y^{-2}}{2 \cdot x^{-5} \cdot y^3}\right)^5 =$

3.5 Lösungen zu Potenzen

1) $x^0 = 1$

2) $3^2 \div 3^2 = 3^{2-2} = 3^0 = 1$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4}$

4) $\left(5^4\right)^2 \cdot 5^{(-6)} = 5^{4\cdot 2} \cdot 5^{-6} = 5^{8-6} = 5^2$

5) $-4^{-2} = \frac{1}{-4^2} = \frac{1}{16}$

6) $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

7) $\frac{2}{3^{-5}} = \frac{2 \cdot 3^5}{1} = 2 \cdot 3^5$

8) $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$

9) $y^5 \cdot y^{-5} = y^{5-5} = y^0 = 1$

10) $\left(3^3\right)^2 = 3^{3\cdot 2} = 3^6$

11) $\left(\frac{x^{-4}}{x^{-2}}\right)^{-3} = \left(\frac{x^2}{x^4}\right)^{-3} = \left(x^{2-4}\right)^{-3} = \left(x^{-2}\right)^{-3} = x^{(-2)(-3)} = x^6$

12) $\frac{1}{x^{-3} \cdot y^{-3}} = \frac{1}{(x \cdot y)^{-3}} = (x \cdot y)^3$

13)
$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{4}{2}\right)^4 2^2 + 4^3 + 6^4 - 6^3 + 6^2 - \left(2^2 \cdot 5^3\right) + 2^4 \\
&= 2^4 + 2^2 + 4^3 + 6^4 - 6^3 + 6^2 - \left(2^2 \cdot 5^3\right) + 2^4 \\
&= 10^4 - 2^3 + 8^2 - \left(2^2 \cdot 5^3\right) \\
&= 10.000 - 8 + 64 - (4 \cdot 125) \\
&= 668
\end{aligned}
$$

14)
$$
\left(\frac{x^3 \cdot \overbrace{y^{-2}}^{Kehrwert!}}{2 \cdot \underbrace{x^{-5}}_{Kehrwert!} \cdot y^3}\right)^5 = \left(\frac{x^3 \cdot \overbrace{x^5}^{Kehrwert}}{2 \cdot \underbrace{y^2}_{Kehrwert} \cdot y^3}\right)^5 = \left(\frac{x^{3+5}}{2 \cdot y^{2+3}}\right)^5 = \left(\frac{x^8}{2^1 \cdot y^5}\right)^5 = \frac{x^{8\cdot 5}}{2^{1\cdot 5} \cdot y^{5\cdot 5}} = \frac{x^{40}}{2^5 \cdot y^{25}} = x^{40} \cdot 2^{-5} \cdot y^{-25}
$$

4 Rationale Exponenten und Wurzeln

Regeln:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Statt n-te Wurzel kann man auch hoch den Kehrwert von n schreiben.

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Wenn über der Wurzel nichts steht, ist immer die 2-te Wurzel gemeint. Die 2-te Wurzel ist übrigens das Gleiche wie hoch ½ = 0,5.

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

$\sqrt[0]{x} \cong x^{\frac{1}{0}} \Rightarrow$ geht nicht, da man durch 0 nicht teilen darf!

$$\sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

Einfaches Beispiel mit Zahlen:
$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\sqrt[n]{x \cdot y} = (x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}} \right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Beispiel:
$x^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^2 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

Die wohl wichtigste Eigenschaft von Wurzeln ist, dass man die Wurzel auch als Potenz schreiben kann! Dadurch kann man für viele Rechnungen die Rechenwege vereinfachen und die Potenzgesetzte anwenden. Wie in den Regeln beschrieben nimmt man den Kehrwert von *n* und schreibt diesen als Potenz:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

4.1 Sonderfall negative Zahl unter der Wurzel

4.1.1 wenn n gerade ist

z.B. 2-te Wurzel, 4-te, 6-te Wurzel, etc., kann von einer negativen Zahl keine Wurzel gezogen werden (Ergebnis ergibt zumindest keine reelle Zahl)

$$\sqrt[2]{4} = 2$$

$$\sqrt[2]{-4} = \text{ergibt keine reelle Zahl!}$$

Erklärung:
Beim Potenzieren mit geraden Exponenten kommt immer eine positive Zahl heraus:

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

Da die Wurzelfunktion die Umkehrfunktion der Potenz ist, kann es nie eine negative Zahl unter der Wurzel geben, denn minus mal minus gibt plus! (Wie man sieht ist in beiden Beispielen die 4 positiv)

4.1.2 wenn n ungerade ist

z.B. 3-te Wurzel, 5-te, 7-te Wurzel, etc., kann auch von negativen Zahlen die Wurzel gezogen werden, da bei der dritten Wurzel die Vorzeichen beibehalten werden.

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

Erklärung:
Beim Potenzieren mit ungeraden Exponenten kommt immer das gleiche Vorzeichen heraus:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

Da die Wurzelfunktion die Umkehrfunktion der Potenz ist, kann es bei ungeraden n nur negative Zahlen ergeben wenn der Wert unter der Wurzel auch negativ ist, denn minus mal minus mal minus (3 mal minus) gibt minus (gilt natürlich auch für 5-te, 7-te, 9-te, Wurzel etc...).

5 Polynome

5.1 Polynome n-ter Ordnung

Ein Polynom besteht aus *Variablen* und *Koeffizienten*. Die Variablen enthalten die Exponenten (z.B. x^3) und die Koeffizienten stellen die Multiplikationsfaktoren der Variablen dar (z.B. $2x^3$). Die Variablen werden nur durch Addition/Subtraktion und Multiplikation verknüpft!

Formale Schreibweise:

$$\Rightarrow a_0 + a_1 \cdot \underbrace{x^1}_{\text{Variable}} + \underbrace{a_2}_{\text{Koeffizient}} x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$$

n ist der höchste Exponent der im Polynom auftritt

Beispiele für Polynome n-ter Ordnung (n-ten Grades):

$4x^2 + 5x + 3$ = Polynom 2-ten Grades

$a^2 + 7a^5 - 3a + 2a^7$ = Polynom 7-ten Grades

An dieser Stelle sei nochmal besonders darauf hingewiesen, daß man Variablen mit unterschiedlichen Exponenten (z.B. hoch 2, hoch 3, etc.) bei Verknüpfung mit Addition/Subtraktion nicht zusammenzählen darf!

Die Variablen werden i.d.R. (zumindest nach Auflösung bzw. Zusammenfassung) nach absteigenden Exponenten sortiert (z.B. $y = x^3 + x^2 + x$)!

5.1.1 Addition/Subtraktion

Die Glieder gleichen Grades werden addiert, bzw. subtrahiert

Beispiel:

$$(4x^2 + 5x + 3) + (x^2 - 2x + 1)$$
$$= 5x^2 + 3x + 4$$

5.1.2 Multiplikation

Jedes Glied des einen Polynoms wird mit jedem Glied des anderen Polynoms ausmultipliziert. Anschließend werden - wie bei der Addition/Subtraktion - Glieder gleichen Grades zusammengefasst.

Beispiel:

$$(\underline{4x^2} + \underline{5x} + \underline{3}) \cdot (x^2 - 2x + 1)$$
$$= \underline{4x^2 \cdot x^2 + 5x \cdot x^2 + 3 \cdot x^2} + \underline{4x^2 \cdot -2x + 5x \cdot -2x + 3 \cdot -2x} + \underline{4x^2 \cdot 1 + 5x \cdot 1 + 3 \cdot 1}$$
$$= \underline{4x^4 + 5x^3 + 3x^2} - \underline{8x^3 - 10x^2 - 6x} + \underline{4x^2 + 5x + 3}$$
$$= 4x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x + 3$$

6 Binomische Formeln (Polynome 2. Grades)

Die binomischen Formeln dienen zur schnellen Umformung von Polynomen 2. Grades und können auch zur Bestimmung von Nullstellen nützlich sein. Auf die Herleitung soll an dieser Stelle verzichtet werden, da sich das sowieso keiner behalten kann und das für sämtliche Rechnungen völlig unrelevant ist. Man unterscheidet generell drei Typen:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1. binomische Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 2. binomische Formel

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ 3. binomische Formel

Beispiele:

$$(4x+3y)^2 = 16x^2 + 24xy + 9y^2$$

$$(7x-4y)^2 = 49x^2 - 56xy + 16y^2$$

$$(3x+5y)\cdot(3x-5y) = 9x^2 - 25y^2$$

$$\left(4a^4 - 9b^2\right) = \left(2a^2 + 3b\right)\cdot\left(2a^2 - 3b\right)$$

$$(6x+2y)^2 = 36x^2 + 24xy + 4y^2$$

$$25a^2 - 60ab + 36b^2 = (5a-6b)^2$$

$$5u^3 - 10u^2 + 5u = 5u\cdot\left(u^2 - 2u + 1\right) = 5u\cdot(u-1)^2$$

$$12x^3 - 27x = 3x\cdot\left(4x^2 - 9\right) = 3x\cdot(2x+3)\cdot(2x-3)$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - (x-1)^2 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2 + x + \frac{1}{4} - x^2 + 2x - 1 = 3x - \frac{3}{4}$$

$$\underbrace{(x-3)\cdot(x+3)}_{\text{3. bin. Formel}} + \underbrace{(x-3)^2}_{\text{2. bin. Formel}} - \underbrace{(x+3)^2}_{\text{1. bin. Formel}} = \left(x^2 - 9\right) + \left(x^2 - 6x + 9\right) - \left(x^2 + 6x + 9\right) =$$

$$= \underline{x^2} - 9 + \underline{x^2} - 6x + 9 \underline{- x^2} - 6x - 9 = x^2 - 12x - 9$$

7 Bestimmung von Nullstellen (Polynome 1. + 2. Grades)

Die Bestimmung der Nullstellen dient dazu, den Punkt zu finden, an dem eine bestimmte Funktion durch den Nullpunkt läuft. Dazu setzt man generell die angegebene Funktion mit Null gleich und rechnet die erhaltene Gleichung aus. Die Vorgehensweise ist dabei abhängig vom Grad des vorgegebenen Polynoms. Nachfolgende Erklärung muss man jetzt noch nicht vollständig verstehen: Bei Polynomen 1. Grades (also Funktionen mit x) ist die Nullstelle noch sehr einfach durch Auflösen der Gleichung zu finden. Bei Polynomen 2. Grades (Funktionen mit x^2) ist die Bestimmung mit Hilfe der binomischen Formeln oder mit der pq-Formel möglich (dazu mehr in diesem Kapitel). Bei Polynomen 3. Grades (also Funktionen mit x^3) bedient man sich i.d.R. einer Kombination aus binomischer oder pq-Formel und Polynomdivision (wird im darauf folgenden Kapitel behandelt).

Die Anzahl der Nullstellen entspricht normalerweise der Zahl des Grades des Polynoms. Funktionen mit x haben entsprechend eine, Funktionen mit x^2 zwei und Funktionen mit x^3 drei Nullstellen, usw.. Wie kommt das zustande? Wenn man davon ausgeht, dass man z.B. x^3 auch als $x \cdot x \cdot x$ schreiben kann, ergibt sich aus der Produktregel (siehe Kapitel 1.3), dass für jedes x eine eigene Nullstelle existiert (mathematisch ist das so nicht ganz 100%ig korrekt, aber es soll uns als Erklärung genügen).

Beispiel:

Wenn ein Faktor der nachfolgenden Gleichung 0 ist, wird das gesamte Produkt 0. Das bedeutet, wenn ein einziger Faktor 0 ist, ist das gleichzeitig eine Nullstelle für die gesamte Funktion:

$0 \cdot x \cdot x = 0$
$x \cdot 0 \cdot x = 0$
$x \cdot x \cdot 0 = 0$

Das soll zunächst erst mal zum groben Verständnis genügen. Bei der Polynomdivision wird noch ausführlich darauf eingegangen.

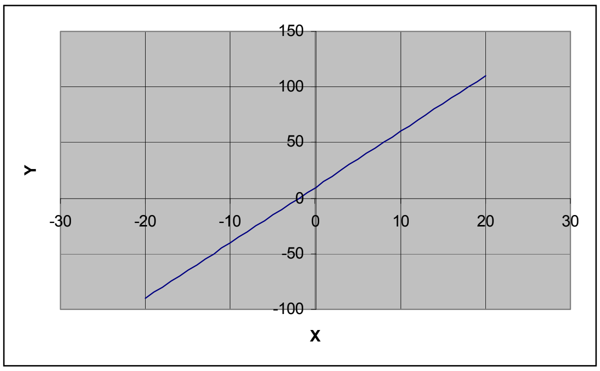
7.1 Polynome 1. Grades

Bei diesen wird die Nullstelle direkt durch Auflösen der Gleichung gefunden:

$ax + b = 0 \quad | -b$
$ax = -b \quad | :a$
$x = -\frac{a}{b}$

Beispiel mit Zahlen:

$5x + 10 = 0 \quad |:5$
$x + 2 = 0 \quad |-2$
$x = -2$



Im Klartextbedeutet dies, dass in einem Koordinatensystem die Funktion für y = 0 ergibt, wenn x = -2 ist.

7.2 Polynome 2. Grades

In der Regel werden die Nullstellen bei Polynomen 2. Grades mit der pq-Formel ermittelt. Alternativ kann auch die sog. quadratische Ergänzung herangezogen werden, auf die hier jedoch nur kurz eingegangen werden soll, da die pq-Formel immer zum selben Ergebnis führt. Zunächst sollen noch zwei Sonderfälle betrachtet werden:

7.2.1 Sonderfall 1:

Für $ax^2 + bx + c$
wenn $c = 0$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$\underbrace{x}_{1.NS} \cdot \left(\underbrace{ax + b}_{2.NS} \right) = 0$$

Da nach der Produktregel gilt, dass die gesamte Gleichung 0 ergibt, wenn x gleich 0 ist und wenn das, was in der Klammer steht (also $ax + b$) gleich 0 ist, ergeben sich zwei Nullstellen:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = ax + b = -\frac{b}{a}$$

7.2.2 Sonderfall 2:

Für $ax^2 + bx + c$
wenn $b = 0$

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \quad ; \quad x_2 = +\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Hier ergeben sich die Nullstellen durch einfaches Auflösen der Gleichung. Zu beachten ist dabei, dass die Wurzel einer geraden Potenz (x^2) immer ein positives und ein negatives Ergebnis beinhaltet, weshalb sich zwei Nullstellen ergeben.

7.2.3 Normalfall

In den meisten Fällen hat man Polynome mit allen Komponenten $a, b, c \neq 0$ vorliegen.
Für $ax^2 + bx + c$ kann man dann die quadratische Ergänzung oder - in der Regel - die pq-Formel anwenden. Dazu muss man jedoch zunächst so umformen, dass a verschwindet und nur noch $x^2 + \ldots$ dasteht.

7.2.4 Die quadratische Ergänzung

Vorweg sei gesagt, dass die quadratische Ergänzung in der Praxis kaum zum Einsatz kommt bzw. vollständig mit der pq-Formel gerechnet werden kann. Die quadratische Ergänzung war jedoch Gegenstand des Brückenkurses und der Vorlesung.

Hintergrund: In manchen Fällen hat man so etwas ähnliches, wie eine binomische Formel bzw. den "Anfang" einer binomischen Formel. In diesem Fall erweitert man die Gleichung so, dass man eine binomische Formel erhält. Im unteren Beispiel passt die -9 nicht ganz zum Rest der Gleichung. Nach der 1. binomischen Formel müsste statt der -9 eine 16 stehen:

Vorgegebene Gleichung:

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

Die "Idealgleichung" zum Lösen nach der 1. binomischen Formel wäre jedoch

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

Deshalb ergänzt man die Gleichung um die Zahl die fehlt (+16) und zieht sie gleich wieder ab (-16), damit sich die Gleichung wertmäßig nicht ändert:

$$\underbrace{x^2 + 8x + 16}_{1.bin.Formel}\underbrace{-16 - 9}_{Rest} = 0$$

Nun kann man den Teil lösen, der die binomische Formel enthält. Der Rest wird einfach "mitgeschleppt":

$$\underbrace{(x+4)^2}_{bin.Formel}\underbrace{-25}_{Rest} = 0 \quad | + 25$$

$$(x+4)^2 = 25 \quad | \sqrt{}$$

$$+(x+4) = 5 \qquad -(x+4) = 5$$

$$x_1 = 5 - 4 \qquad x_2 = -4 - 5$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -9$$

Obiges Beispiel hätte man übrigens genauso gut mit der pq-Formel auflösen können, wobei sich diese sogar für wesentlich mehr Fälle einsetzen lässt. In der Praxis macht die quadratische Ergänzung demnach wenig Sinn, wenn man die (universellere) pq-Formel beherrscht.

7.2.5 pq-Formel

Die pq-Formel eignet sich für alle $ax^2 + bx + c$ sofern $a, b, c \neq 0$. Dabei soll hier auf die Herleitung verzichtet werden. Um das "Auswendiglernen" dieser Formel kommt man jedoch nicht herum:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Ziehen wir noch mal die Gleichung aus dem Kapitel der quadratischen Ergänzung heran,

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

so ergibt sich demnach für p = 8 und für q = -9. Eingesetzt in die pq-Formel entspricht dies:

$$x_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-9)}$$
$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{(4)^2 + 9}$$
$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{25}$$
$$x_{1/2} = -4 \pm 5$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -9$$

Im Gegensatz zur quadratischen Ergänzung muss hier nichts weiter beachtet werden, da keine binomische Formel vorliegen muss. Es genügt p und q zu erkennen und entsprechend in die pq-Formel einzusetzen (Ferner muss natürlich sichergestellt sein, dass x^2 vorne alleine dasteht, also ohne einen konstanten Faktor. - Ansonsten muss durch diesen dividiert werden, wie im folgenden Beispiel bei $9x^2$... durch 9).

Weiteres Beispiel:

$$9x^2 - 12x = 12 \qquad |-12$$
$$9x^2 - 12x - 12 = 0 \qquad |:9$$
$$x^2 - \frac{12}{9}x - \frac{12}{9} = 0 \qquad |\ \text{kürzen!}$$
$$x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = -\frac{4}{3} \qquad q = -\frac{4}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{2}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)}$$

$$x_{1/2} = +\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}}$$

$$x_{1/2} = +\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{12}{9}} \quad = \quad \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} \quad = \quad \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}$$

$$x_1 = \frac{6}{3} = 2 \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

7.2.6 Übungen zu pq-Formeln:

1) $7x^2 - 11x + 6 = x \cdot (x+1)$

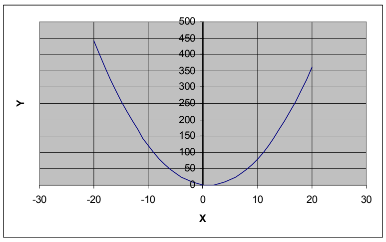
2) $(x+1)^2 + (x+2)^2 - 12 = 0$

3) $-7x^2 - 16x - 28 = 0$

7.2.7 Lösungen zu pq-Formeln:

1)

$$7x^2 - 11x + 6 = x \cdot (x+1)$$
$$7x^2 - 11x + 6 = x^2 + x$$
$$6x^2 - 12x + 6 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$



Grafik zur Lösung 1
Es gibt genau einen Schnittpunkt!

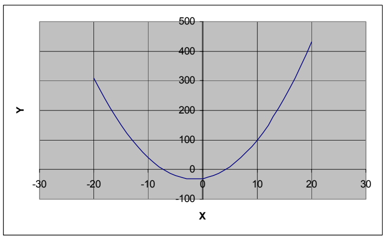
$$p = -2 \qquad q = 1$$

$$x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 1} \quad = \quad 1 \pm \sqrt{1-1} \quad = \quad 1 \pm 0$$

$x = 1$ (nur eine Lösung für x!)

2)

$$\underbrace{(x+1)^2}_{1.bin.Formel} + \underbrace{(x+2)^2}_{1.bin.Formel} - 12 = 0$$
$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{1.bin.Formel} + \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{1.bin.Formel} - 12 = 0$$
$$2x^2 + 6x - 7 = 0$$
$$x^2 + 3x - \frac{7}{2} = 0$$



Grafik zur Lösung 2
Die Kurve schneidet die X-Achse 2 Mal!

$$p = 3 \qquad q = -\frac{7}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)} \quad = \quad -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{14}{4}} \quad = \quad -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{23}{4}}$$

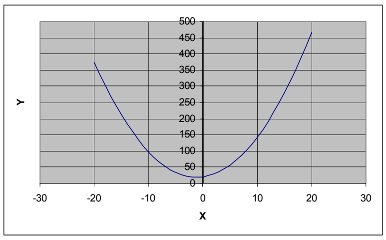
$$x_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{23}{4}} \qquad x_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{23}{4}}$$

3)

$$-7x^2 - 16x - 28 = 0$$

$$x^2 = \frac{-16}{-7}x + \frac{-28}{-7} = 0$$

$$x^2 = \frac{16}{7}x + 4 = 0$$



Grafik zur Lösung 3
Die Kurve berührt die X-Achse nie!

$$p = \frac{16}{7} \qquad q = 4$$

$$x_{1/2} = -\frac{\left(\frac{16}{7}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{16}{7}\right)}{2}\right)^2 - 4} = -\frac{16}{14} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{14}\right)^2 - 4} = -\frac{8}{7} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^2 - 4}$$

$$= -\frac{8}{7} \pm \sqrt{\frac{64}{49} - \frac{196}{49}} = -\frac{8}{7} \pm \sqrt{-\frac{132}{49}}$$

negative Zahl unter der Wurzel ergibt keine reelle Zahl!
$\Rightarrow$ keine reelle Lösung!

8 Gebrochen rationale Ausdrücke

Gebrochen rationale Ausdrücke sind Brüche, die auch Variablen enthalten. Dabei ist zu beachten, daß der Nenner nicht Null werden darf, da die Division durch Null nicht zulässig ist.

$$\frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}} \quad \rightarrow \quad \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ... + b_nx^n}$$

8.1 Division

Bei der Division zweier gebrochen rationaler Ausdrücke multipliziert man einfach mit dem Kehrwert (siehe Kapitel 2, Bruchrechnung).

Beispiel:

$$\frac{x+3}{2x-1} \div \frac{x^2-6x+2}{2x+5} =$$

Zunächst muss man ausschließen, dass der Nenner 0 wird und berechnet die Zahl für x, die den Nenner jeweils 0 werden lässt und schließt diese aus der zulässigen Zahlenmenge aus:

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Definitionsbereich}: \; R/\left\{\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right\}$$

$$2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

x darf also jede Zahl außer 0,5 und -5/2 sein.

Jetzt multipliziert man einfach mit dem Kehrwert:

$$\frac{x+3}{2x-1} \div \frac{x^2-6x+2}{2x+5} =$$

$$\frac{(x+3)\cdot(2x+5)}{(2x-1)\cdot(x^2-6x+2)} =$$

$$\frac{2x^2+5x+6x+15}{2x^3-12x^2+4x-x^2+6x-2} =$$

$$\frac{2x^2+11x+15}{2x^3-13x^2+10x-2}$$

8.2 Multiplikation

Bei der Multiplikation wird - gemäß der Regeln für Bruchrechnung - Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner ausmultipliziert.

Beispiel:

$$\frac{x-1}{x+3} \cdot \frac{\left(x^2-6x+3\right)}{4-x} = \qquad\qquad \text{x} \neq \{-3;4\}$$

$$\frac{(x-1)\cdot\left(x^2-6x+3\right)}{(x+3)\cdot(4-x)} =$$

$$\frac{x^3-6x^2+3x-x^2+6x-3}{4x-x^2+12-3x} =$$

$$\frac{x^3-7x^2+9x-3}{-x^2+x+12}$$

8.3 Addition/Subtraktion

Hier wird - gemäß den Regeln für Bruchrechnung - Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner addiert. Ist der Nenner identisch muss nichts weiter beachtet werden. Sind die Nenner verschieden, so muss zunächst - gemäß den Regeln für Bruchrechnung - erweitert werden.

8.3.1 Addition/Subtraktion mit identischen Nennern

Beispiel:

$$\frac{x-3}{2x+1} + \frac{6x^2-x+1}{2x+1} = \frac{x-3+6x^2-x+1}{2x+1} = \frac{6x^2-2}{2x+1}$$

8.3.2 Addition/Subtraktion mit verschiedenen Nennern

Beispiel:

$$\frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\ \cdot(x+1)} + \frac{x^2}{(x+1)\cdot x^2} = \frac{x^2-1+x^2}{x^2\cdot(x+1)} = \frac{2x^2-1}{x^2(x+1)}$$

Erweitern mit (x+1), bzw. x^2

9 Lineare Ungleichungen

Ungleichungen werden grundsätzlich genauso gerechnet wie Gleichungen – es gibt jedoch ein paar wenige, jedoch bedeutende Besonderheiten: Lineare Ungleichungen enthalten keine eindeutigen Lösungen, wie "normale" Gleichungen. Statt $x = 3$ ergeben sich hier Lösungen wie $x > 7$. Allgemein lässt sich sagen, dass die Lösungen linearer Ungleichung sog. Intervalle beschreibt, also Teile eines Zahlenstrahls. Diese Intervalle können unterschiedlich beschrieben werden:

[a, b] = geschlossenes Intervall (a und b sind eingeschlossen)
[a, b[= halboffenes Intervall (a ist eingeschlossen, b ist ausgeschlossen und gehört nicht mehr dazu)
]a, b[= offenes Intervall (a und b sind ausgeschlossen)

Beispiel:
]0, 10] = alle Zahlen größer als Null bis einschließlich der 10
[2, -∞[= alle Zahlen ab der 2 (einschließlich 2)

Eine weitere Besonderheit ist die Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl. In diesem Falle dreht sich das Ungleichheitszeichen um:

Beispiel:

$$-2x \geq -12 \quad \left| \div(-2) \right.$$
$$x \leq 6$$

Beim Lösen von Ungleichungen gelten die gleichen Regeln wie beim Lösen von Gleichungen, es gelten jedoch folgende Besonderheiten:

- **Das Ungleichheitszeichen (< , >, >=, <=) wird umgedreht, wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert!**
- **Die Lösung beschreibt i.d.R. Intervalle**

Gerade der Umstand mit dem Vorzeichenwechsel sorgt für einige Verwirrung. Nachfolgend möchte ich alle Variationen dieses Aufgabentyps vorstellen.

9.1 *Ungleichungen ohne Fallunterscheidung*

Beispiel ohne Vorzeichenwechsel:

$$7x - 4 > 3x + 12 \quad |-3x$$
$$4x - 4 > 0 + 12 \quad |+4$$
$$4x > 16 \quad |:4$$
$$x > 4$$

$$\text{Lösung}: \;]4, +\infty[$$

Beispiel mit Vorzeichenwechsel:

$$3x + 12 < 7x - 4 \qquad |\text{-}7x$$
$$-4x + 12 < -4 \qquad |\text{-}12$$
$$-4x < -16 \qquad |:(-4)$$
$$x > 4$$

Ungleichheitszeichen wird umgedreht!

$$\text{Lösung: } \left]4, +\infty\right[$$

Solange man nur mit konstanten Zahlen Dividiert oder Multipliziert, ist das Ganze noch überschaubar. Muss man mit Variablen multiplizieren oder dividieren, so stellt sich das Problem, dass man zu dieser Zeit nicht weiß, ob die Variable positiv oder negativ ist. Der einzige (mir bekannte) Grund, warum man eine Ungleichung mit einer Variablen multipliziert ist der Bruch – und zwar konkret mit einer Variablen im Nenner. Um den Bruch aufzulösen ist man gezwungen, die Ungleichung mit der Variablen oder einem Term, der die Variable enthält zu multiplizieren.

$$\frac{2x+5}{x} \geq 0$$

Wäre $x = 1$, dann könnte man hier getrost mit x multiplizieren. Ist x jedoch -1, dann muss man nach der Regel das Ungleichheitszeichen umdrehen. Um dieser Regel gerecht zu werden, macht man eine Fallunterscheidung:

Fall 1: Multiplikator wäre positiv (in unserem Beispiel $x > 0$)

$$\frac{2x+5}{x} \geq 1 \qquad |\cdot x$$

$$2x + 5 \geq x$$

$$x \geq -5$$

Fall 2: Multiplikator wäre negativ (in unserem Beispiel $x < 0$) – Ungleichheitszeichen wird gedreht!

$$\frac{2x+5}{x} \geq 1 \qquad |\cdot x$$

$$2x + 5 \leq x$$

$$x \leq -5$$

9.2 *Ungleichungen mit Fallunterscheidung*

Ausgehend davon, dass für Ungleichungsaufgaben aus oben genannten Gründen meist Brüche mit Variablen vorkommen, möchte ich die zwei Grundformen der Ungleichungen mit Fallunterscheidung genauer vorstellen:

9.2.1 Ungleichungen mit Betrag

Die Betragsfunktion wird erst in einem späteren Kapitel behandelt. Wem die Betragsfunktion jetzt noch nichts sagt, der kann dieses Unterkapitel erst mal überspringen und bei 9.2.2 weiter machen. Später werden Ungleichungen im Zusammenhang mit der Betragsfunktion jedoch noch wichtig und dann sollte man die Unterschiede beider Typen kennen!

Für die Ungleichung mit einer Betragsfunktion im Nenner wird eine Fallunterscheidung gemacht: Ist der Nenner positiv, wird normal weiter gerechnet, ist er negativ, wird der Term im Betrag beim Multiplizieren mal (-1) genommen. Das Ungleichheitszeichen wird hier nicht umgedreht, da die Negierung den Term wieder positiv macht!

Das mag zunächst unlogisch erscheinen, die Betragsfunktion sagt aber aus, dass alle Werte positiv sein müssen. Um einen eventuell negativen Term innerhalb der Betragszeichen „positiv zu machen“, muss man ihn mit (-1) multiplizieren damit er dem Betragswert entspricht (siehe dazu im Kapitel „Der absolute Betrag“). Ein Betragswert kann also am Ende immer nur positiv sein, deshalb wird das Ungleichheitszeichen hier nie umgedreht!

Beispiel mit Betrag:

Der Gesamtbetrag in der eckigen Klammer ist jedoch positiv, deshalb keine Umkehr des Ungleichheitszeichens!

$$\frac{4x+2}{|x-2|} \geq 4$$

1. Fall: (x - 2) ist positiv	2. Fall: (x - 2) ist negativ
$4x+2 \geq 4 \cdot (x-2)$	$4x+2 \geq 4 \cdot [-(x-2)]$
...	...

9.2.2 Ungleichungen ohne Betrag

Dies ist wohl die häufigste Form der Ungleichungsaufgaben. Deshalb möchte ich den Rechenweg ganz ausführlich beschreiben. Auch hier wird eine Fallunterscheidung für den Nenner gemacht. Ist der Nenner positiv, bleibt das Ungleichheitszeichen bestehen, ist er negativ, wird das Ungleichheitszeichen umgedreht. Zunächst ein kurzes Beispiel:

$$\frac{4x+2}{x-2} \geq 4$$

Das Ungleichheitszeichen dreht sich um!

1. Fall: (x - 2) ist positiv	2. Fall: (x - 2) ist negativ
$4x+2 \geq 4 \cdot (x-2)$	$4x+2 \leq 4 \cdot (x-2)$
...	...

Hier folgt nun ein etwas ausführlicheres Beispiel:

$$\frac{x-3}{x-1}+2\geq -3 \qquad |\cdot(x-1)$$

1. Fall für:

$x\text{-}1 \;>\; 0$

$x > 1$

Der 1. Fall prüft hier für positive Werte von (x-1), also bleibt das Vorzeichen >= bestehen!

$$x-3+2\cdot(x-1)\geq -3\cdot(x-1)$$
$$x-3+2x-2\geq -3x+3$$
$$6x-5\geq 3$$
$$6x\geq 8$$
$$x\geq \frac{8}{6}\geq \frac{4}{3}$$

Für alle **x größer 1** gilt, daß die Lösungsmenge für x größer oder gleich 4/3 sein muß. Die Lösungsmenge beginnt also nicht bei 1, sondern bei **4/3**!

2. Fall für:

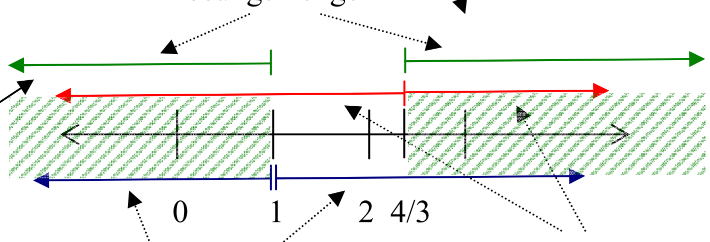
$x\text{-}1 \;<\; 0$

$x < 1$

Der 2. Fall prüft für negative Werte von (x-1), also wird das Vorzeichen umgedreht!

$$x-3+2\cdot(x-1)\leq -3\cdot(x-1)$$
$$x-3+2x-2\leq -3x+3$$
$$6x-5\leq 3$$
$$6x\leq 8$$
$$x\leq \frac{8}{6}\leq \frac{4}{3}$$

Lösungsmenge



Ergebnisse der Fallunterscheidungen

Bereich, der jeweils von der Fallunterscheidung geprüft wird

Für alle **x kleiner 1** gilt die Lösungsmenge **<= 4/3**. Da dies jedoch erst ab x < 1 geprüft wurde, enthält der Lösungsbereich nur die Zahlen kleiner 1!

Die Lösungsmenge ist die Schnittmenge aus den Bereichen, die geprüft werden und den jeweiligen Lösungen:]-∞, 1[; [4/3, +∞[

10 Polynomdivision (Polynome 3. Grades)

Die Polynomdivision dient indirekt dazu, die 2. und 3. Nullstelle eines Polynoms 3. Grades zu ermitteln. Die 1. Nullstelle wird (in den klausurrelevanten Aufgaben) durch Ausprobieren (Einsetzen von x) ermittelt. Dabei setzt man i.d.R. nur ganze Zahlen (z.B. 1, 2, 3 oder -1, -2, -3) ein. Hat man so die erste Nullstelle gefunden, kann man den Faktor dieser Nullstelle ausklammern. Die weiteren zwei Nullstellen findet man im "Rest" des Polynoms, welches dann nur noch 2. Grades ist. Um genau diesen "Rest" zu ermitteln muss man das ursprüngliche Polynom (3. Grades) durch den ausgeklammerten Faktor mit der Polynomdivision dividieren. Das klingt zunächst alles sehr verwirrend, wird aber klarer wenn man die einzelnen Vorgehensweisen näher betrachtet.

10.1 Division ohne Polynom

Bevor wir uns mit Polynomen und Nullstellen "herumschlagen" schauen wir uns erst einmal an, wie eine Division - ganz ohne Taschenrechner - berechnet werden kann. Diese simple Methode ist Grundlegend für das Verständnis der Polynomdivision und wird deshalb auch sehr ausführlich beschrieben:

1680 : 15 = ? = 112
16
-15 (1 Mal)
18
-15 (1 Mal)
30
-30 (2 Mal)
0

Lösungsweg:
Zunächst betrachtet man nur die ersten beiden Stellen der zu dividierenden Zahl 1680 (es können auch mehr Stellen sein, aber hier sind zwei Stellen übersichtlicher und einfacher zu rechnen). Man rechnet also zunächst nur mit 16 und schaut wie oft die 15 in die 16 "reinpasst" (also 1 Mal) und schreibt den verbleibenden Rest unten drunter (16 - 15 = Rest 1). Nun zieht man die nächste Zahl (also 8) von oben herunter und erhält somit 18. Die 15 paßt ebenfalls 1 Mal in die 18 und ergibt den Rest 3. Nun zieht man die 0 herunter und erhält 30. Die 15 passt nun genau 2 Mal in die 30 und ergibt den Rest 0, womit die Division beendet ist. Die hier grau hinterlegten Zahlen schreibt man immer rechts vom Gleichheitszeichen auf und siehe da, das ergibt zusammen 112 - nämlich das Ergebnis von 1680:15 ☺

Noch ein Beispiel? - Bitteschön! Die folgende Aufgabe ist hier in "Prosa" aufgedröselt. Es empfiehlt sich, die Rechnung nach dem Muster der ersten Aufgabe auf einem gesonderten Blatt nachzurechnen:

84994: 13 = ? = 6538

wie oft passt die 13 in die 84?
$6 \cdot 13 = 78 \rightarrow$ ergibt Rest 6

nun zieht man die 9 herunter und erhält 69
$5 \cdot 13 = 65 \rightarrow$ ergibt Rest 4

nun zieht man die 9 herunter und erhält 49
$3 \cdot 13 = 39 \rightarrow$ ergibt Rest 10

nun zieht man die 4 herunter und erhält 104 (nicht 14!!!)
$8 \cdot 13 = 104 \rightarrow$ ergibt Rest 0 $\rightarrow$ Division abgeschlossen!

10.2 Warum Polynomdivision?

Was hat die vorangegangene Division nun mit der Polynomdivision zu tun? Ganz einfach - das Prinzip ist nämlich identisch, nur dass man bei Polynomen mit verketteten (Addition/Subtraktion) Variablen und Zahlen arbeitet - doch dazu später mehr.

Nachdem das Prinzip der Division nun (hoffentlich) soweit klar ist, widmen wir uns nun dem Polynom 3. Grades und bestimmen zunächst die 1. Nullstelle:

Beispiel:
$y = x^3 - x^2 - 4x + 4$

Die 1. Nullstelle wird bei den Klausurrelevanten Aufgaben wohl immer 1, 2, 3 oder -1, -2, -3 sein. Wir müssen also lediglich die Gleichung mit 0 gleichsetzen und Zahlen (-3 bis 3) für *x* einsetzen und durch Ausprobieren die Nullstelle herausfinden.

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

wir versuchen es zunächst mit $x = 1$ und liegen gleich richtig:

$$1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 0$$
$$1 - 1 - 4 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 1$$

Die erste Nullstelle liegt also bei 1!

Nun wird es etwas komplizierter: Für ein Polynom 3. Grades kann man direkt keine Nullstellen bestimmen (außer durch Ausprobieren). Bei der Bestimmung der 2. und 3. Nullstelle macht man sich zunutze, dass das Ergebnis einer Multiplikation gleich 0 ist, sobald ein Faktor 0 ist (siehe Kästchen).

Man formt deshalb die Gleichung (das Polynom 3. Grades) in die sog. Faktor-Schreibweise um und erhält ein Polynom 1. und ein Polynom 2. Grades. Dazu klammert man zunächst den ersten Faktor aus, der 0 ergäbe. In unserem Beispiel ist das (*x*-1), da die erste Nullstelle ja bei 1 liegt und (*x*-1) dann 0 ergibt. Klammert man die (*x*-1) aus, erhält man folgende Gleichung:

> Ist ein Produkt gleich Null $x \cdot y = 0$ so ist mindestens ein Faktor gleich Null!
> (x oder y muß also 0 sein sonst wäre das Ergebnis nicht 0)

$$(x-1) \cdot (x^2 - 4) = (x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

Wie wir bereits festgestellt haben, wird das Produkt des Polynoms Null wenn $(x-1)$ Null ist. Daraus ergibt sich nach der Faktorregel der Umkehrschluss, dass auch das Produkt Null ergibt, wenn $(x^2 - 4)$ Null ist. In diesem Teil des Polynoms steckt also die 2. und 3. Nullstelle, die i.d.R. mit den binomischen Formeln oder der pq-Formel aufgelöst werden können (siehe folgendes Kapitel). Hauptproblem bleibt nun noch, auf die $(x^2 - 4)$ zu kommen – denn in der Praxis haben wir nur den rechten Teil der Gleichung und müssen den Faktor erst mal berechnen. Dazu muss man die Ursprüngliche Gleichung $(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ durch $(x-1)$ teilen und damit kommt nun endlich die Polynomdivision zum Einsatz ☺. Zugegebenermaßen klingt das alles zunächst sehr verwirrend. Wir werden jedoch im folgenden Kapitel etwas pragmatischer vorgehen und sehen, dass alles gar nicht so kompliziert ist.

10.3 Polynome dividieren

Die eigentliche Schwierigkeit beim Ermitteln der 2. und 3. Nullstelle eines Polynoms 3. Grades besteht darin, auf den zweiten Faktor zu kommen aus dem man die Nullstellen bestimmen kann. Wir dividieren dazu das Polynom 3. Grades durch den ersten Nullstellen-Faktor (Polynom 1. Grades) und erhalten ein Polynom 2. Grades mit dem man weiterrechnen kann.

$$\left(x^3 - x^2 - 4x + 4\right) \div \left(x - 1\right) = ?$$

Wir betrachten zunächst nur das erste x^3 unseres Ausdrucks:
Um auf x^3 zu kommen, muss x mit x^2 multipliziert werden, was bereits Teil unserer Lösung ist. Multipliziert man nun x^2 mit dem gesamten Divisor (x - 1), so erhält man $x^3 - x^2$. Dies wird - wie bei der normalen Division - von oben (also vom gesamten Ausdruck) abgezogen und man erhält Rest 0:

$$\begin{array}{l} (x^3 - x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = x^2 \ldots \\ \underline{-(x^3 - x^2)\qquad\qquad} \\ \qquad 0 \ - 4x + 4 \end{array}$$

Den Rest des obenstehenden Ausdrucks holt man nun herunter. Dann sucht man den Multiplikator (für - 4x und x, was -4 ist). Wieder multipliziert man -4 mit dem Divisor (x - 1), was (-4x + 4) ergibt:

$$\begin{array}{l} (x^3 - x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = x^2 - 4 \\ \underline{-(x^3 - x^2)\qquad\qquad} \\ \qquad 0 \ - 4x + 4 \\ \underline{\qquad\ \ -(-4x + 4)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Da der Rest 0 ergibt ist die Polynomdivision nun abgeschlossen. Das Ergebnis (der zweite Faktor unserer Multiplikation) ist demnach x^2 - 4.

Die Umformung unserer Gleichung in Faktorschreibweise lautet nun:

$$\left(x^3 - x^2 - 4x + 4\right) = \left(x - 1\right) \cdot \left(x^2 - 4\right)$$

Die 2. und 3. Nullstelle ergibt sich durch Anwendung der 3. binomischen Formel für x^2 - 4:

$$\left(a + b\right) \cdot \left(a - b\right) = a^2 - b^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 2^2 = \left(x + 2\right) \cdot \left(x - 2\right)$$

x_2 ist demnach -2 und x_3 ist 2 (oder umgekehrt - je nach Schreibweise der bin. Formel)

Zum besseren Verständnis noch mal die gesamte Gleichung in der Faktorschreibweise:

$$y = \left(x^3 - x^2 - 4x + 4\right) = \left(x - 1\right) \cdot \left(x - 2\right) \cdot \left(x + 2\right)$$

Hier wird deutlich, wie sich die Nullstellen ergeben: Da das Produkt der Faktoren 0 ergibt sobald einer der drei Faktoren 0 wird, lassen sich die Nullstellen hier direkt ableiten:

$$y = \left(x^3 - x^2 - 4x + 4\right) = \left(\underbrace{x}_{x_1} - 1\right) \cdot \left(\underbrace{x}_{x_2} - 2\right) \cdot \left(\underbrace{x}_{x_3} + 2\right)$$

Lösung: $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = -2$

10.4 Zusammenfassung Polynome 3. Grades

Die Nullstellen für Polynome 3. Grades werden folgendermaßen bestimmt:

1. Erste Nullstelle durch Ausprobieren finden
(1, 2, 3, -1, -2, -3 für x einsetzen und schauen, was 0 ergibt)
2. Faktor errechnen, der 0 ergibt
(ergibt sich aus x - der ersten Nullstelle, was bei negativer Nullstelle x + ... ergibt)
3. Gesamte Gleichung durch den ermittelten Faktor (x - ...) per Polynomdivision teilen
(Ergebnis ist ein Polynom 2. Grades)
4. Das Ergebnis lässt sich dann mit binomischer- oder pq-Formel nach Nullstellen auflösen
($x_{2/3}$ ergibt demnach die 2. und 3. Nullstelle)

10.5 Polynome 4. Grades

Grundsätzlich kann die Polynomdivision auch bei Polynomen 4. Grades angewandt werden, sofern eine Nullstelle erraten werden kann oder bereits bekannt ist. Die durch Faktorschreibweise erhaltene Funktion 3. Grades wird dann einfach nochmals per Polynomdivision auf ein Polynom 2. Grades reduziert (man muss also 2-mal die Polynomdivision durchführen!), um dann per pq-Formel, etc. die letzten beiden Nullstellen zu ermitteln.

11 Der absolute Betrag

Das Grundprinzip der Betragsrechnung ist einfach: Alles was in Betragszeichen steht (Betragszeichen sind zwei vertikale Striche um einen mathematischen Ausdruck), gilt als absoluter, positiver Wert. Es wird also nur der "Betrag" des Wertes berücksichtigt, nicht das Vorzeichen. Soweit ist alles noch ganz gut nachvollziehbar...

Das Betragszeichen wird so ähnlich behandelt wie eine Klammer: zuerst den Wert innerhalb des Betrages ausrechnen und dann mit den Zahlen außerhalb des Betrages weiter rechnen. Bei verschachtelten Beträgen wird - wie bei Klammer - von innen nach außen gerechnet.

Beispiele:

$$|5| = 5$$

$$|-5| = 5$$

$$-|-5| = -5$$

$$-|3-5| = -|-2| = -2$$

$$|5-|-10|| = |5-10| = |-5| = 5$$

$$-|4-8\cdot(6-2)|\cdot|9-14| = -|4-48+16|\cdot|-5| = |-28|\cdot|-5| = -28\cdot 5 = -140$$

Will man die Betragsfunktion in herkömmlicher Schreibweise - also ohne Betragstriche - darstellen, setzt man statt der Betragszeichen einfach eine Klammer. Wenn das, was innerhalb der Klammer steht als Gesamtwert positiv ist, braucht man nichts weiter zu beachten - es kommt dann ja genau das gleiche heraus wie bei der Schreibweise mit Betragszeichen. Wenn das, was innerhalb der Klammer steht jedoch negativ ist, muß man die Klammer noch mal -1 nehmen, damit das Gleiche herauskommt wie bei der Betragsfunktion.

Beispiel:

$$|5| = 5 \Rightarrow (5) = 5$$

Der Wert in den Betragszeichen ist bereits positiv, man kann statt der Betragszeichen eine Klammer setzen und es kommt das gleiche Ergebnis wie bei der Betragsfunktion heraus - nämlich 5!

$$|-5| = 5 \Rightarrow (-5)\cdot(-1) = 5$$

Der Wert zwischen den Betragszeichen ist negativ. Wenn man nur eine Klammer um die -5 setzt, kommt auch -5 heraus. Damit das gleiche herauskommt, wie bei der Betragsfunktion, muß die Klammer noch mal -1 genommen werden und dann kommt - wie oben - ebenfalls 5 heraus!

Wozu dieser ganze Aufwand mit der Unterscheidung nach negativen oder positiven Werten im Betrag, wenn die Funktion doch sowieso nur positive Werte zurückgibt?

Der Grund ist ganz einfach: bei komplexeren Rechnungen mit Variablen innerhalb der Betragszeichen kann man nicht vorhersagen, welchen Wert die Variablen haben und somit ist auch der Wert innerhalb des Betrages nicht vorhersehbar.

Beispiel:

$y = |x| + x$

Gegeben sei diese einfache Gleichung

$x = 1 \Rightarrow$

$y = |1| + 1 = 2$

Hat x den Wert 1 kommt unter Berücksichtigung der Betragsfunktion y = 2 heraus - man hätte also statt der Betragszeichen auch eine Klammer schreiben können und es hätte das gleiche Ergebnis ergeben

$x = -1 \Rightarrow$

$y = |-1| - 1 = 1 - 1 = 0$

Hat x den Wert (-1) so erhalten wir für den Betrag den Wert 1 und die gesamte Gleichung wird somit zu y = 0 - Hätte man hier ebenfalls eine Klammer eingesetzt, wäre ein ganz anderer Wert herausgekommen, nämlich y = -2

Wie das Beispiel zeigt, kann man mit dem Betrag nicht direkt rechnen. So würde es keinen Sinn machen, die obige Gleichung in y = 2x umzuformen (obwohl x + x = 2x ergibt). Da für negative x immer y = 0 herauskommt, stimmt die Gleichung ja nicht mehr sobald x negativ wird. Will man mit herkömmlichen Rechenwegen die Variablen auflösen, kann man mit der Betragsfunktion also nicht viel anfangen. Man muss eine Fallunterscheidung machen und "simuliert" eine Betragsfunktion mit herkömmlichen Klammern (mit den Klammern kann man dann normal weiterrechnen). Ist der Wert in der Klammer positiv, braucht man nichts weiter zu beachten. Ist der Wert negativ, muss die Klammer mal -1 multipliziert werden.

Unser obiges Beispiel würde demnach korrekt lauten:

$y = |x| + x$

$\Rightarrow$

Für $x > 0$ gilt *

$y = (x) + x$

$y = (1) + 1 = 2$

setzt man für x wieder 1 ein, ergibt die Gleichung y = 2

Für $x < 0$ gilt *

$y = (x) \cdot (-1) + x$

$y = ((-1) \cdot (-1)) - 1 = 0$

wird für x nun -1 eingesetz, ergibt diese Gleichung y = 0, also das Gleiche wie im Beispiel mit der Betragsschreibweise. Hätte man hier nicht unterschieden und mal -1 weggelassen, so hätte diese Gleichung für y den Wert -2 ergeben und würde nicht mit der Betragsfunktion übereinstimmen!

* genau genommen muss 0 auch noch berücksichtigt werden. Normalerweise würde man die 0 in einen der beiden Fälle einbeziehen, aber hier lassen wir die 0 der Einfachheit halber weg.

Merke:
Um die Betragsfunktion mit Variablen korrekt wiederzugeben, muss bei der Klammerschreibweise eine Fallunterscheidung gemacht werden. Wird der gesamte Wert innerhalb der Klammer positiv, so kann die Klammer stehen bleiben. Wird der gesamte Wert innerhalb der Klammer negativ, so muss die Klammer mit (-1) multipliziert werden, damit das Gleiche, wie bei der Betragsfunktion herauskommt!

Die Fallunterscheidung der Betragsfunktion ist auch wichtig bei Ungleichungen, da die Rechenregeln besagen, dass sich das Ungleichheitszeichen umdreht, wenn man die Ungleichung mit negativen Werten multipliziert oder dividiert.

Beispiel:

$$-2x \geq -12 \quad \Big| \div(-2)$$
$$x \leq 6$$

Siehe dazu das Kapitel „Lineare Ungleichungen".

TEIL 2

Stoff der Vorlesungen

(Es werden nicht alle Themen abgedeckt)

12 Summenzeichen

Das Summenzeichen erscheint zunächst sehr verwirrend. Bei näherer Betrachtung wird jedoch deutlich, daß es sich dabei lediglich um eine spezielle Schreibweise für sich wiederholende Rechenschritte handelt. Das, was rechts vom Summenzeichen steht - "Summenglied" genannt - ist die Rechnung die jeweils wiederholt wird (siehe im Beispiel unten: i^2). Die für i eingesetzte Zahl wird mit der Zahl unter dem Summenzeichen begonnen (siehe im Beispiel unten: 1) und dann in jedem weiteren Rechenschritt um eins erhöht, bis i schließlich den Wert über dem Summenzeichen erreicht hat (siehe im Beispiel unten: 5).

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = \overbrace{1^2}^{1} + \overbrace{2^2}^{2} + \overbrace{3^2}^{3} + \overbrace{4^2}^{4} + \overbrace{5^2}^{5}$$

für i wird eingesetzt: 1 bis 5

oder

$$\sum_{i=3}^{6} i^2 = \overbrace{3^2}^{3} + \overbrace{4^2}^{4} + \overbrace{5^2}^{5} + \overbrace{6^2}^{6}$$

für i wird eingesetzt: 3 bis 6

Man fängt also mit der Zahl unter dem Summenzeichen an (untere Summationsgrenze) und hört auf, wenn die Zahl über dem Summenzeichen (obere Summationsgrenze) erreicht ist - so einfach ist das ;-)

Die formale Schreibweise lautet:

$$\sum_{i=k}^{m} a_i$$

m = obere Summationsgrenze

a_i = Summenglied (die Rechenoperation, die wiederholt wird)

k = untere Summationsgrenze

i = Summationsindex

Das Summenglied kann ganz unterschiedliche Rechenoperationen enthalten:

$$\sum_{i=2}^{4} x^{\frac{1}{i}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} \quad \text{oder z.B.} \quad \sum_{a=5}^{7} a^3 = 5^3 + 6^3 + 7^3$$

oder auch komplexer:

$$\sum_{i=2}^{3} (a_i + i^2) = \overbrace{(a_2 + 2^2)}^{2} + \overbrace{(a_3 + 3^2)}^{3} = a_2 + a_3 + 2^2 + 3^2$$

12.1 Summen mit additiven Konstanten

$$\sum_{i=2}^{5}(i^2+c)=\overbrace{(2^2+c)}^{2}+\overbrace{(3^2+c)}^{3}+\overbrace{(4^2+c)}^{4}+\overbrace{(5^2+c)}^{5}$$

Vereinfacht ergibt sich daraus folgende Formel, die für alle additiven Rechnungen gilt:

$$\sum_{i=k}^{m}(a_i+c)=\sum_{i=k}^{m}a_i+(m-k+1)\cdot c$$

$i \in Z$

12.2 Summen mit multiplikativen Konstanten

$$\sum_{i=2}^{5}(c\cdot i^2)=\overbrace{(c\cdot 2^2)}^{2}+\overbrace{(c\cdot 3^2)}^{3}+\overbrace{(c\cdot 4^2)}^{4}+\overbrace{(c\cdot 5^2)}^{5}=c\cdot\left(2^2+3^2+4^2+5^2\right)$$

Vereinfacht ergibt sich daraus folgende Formel, die für alle multiplikativen Rechnungen gilt:

$$\sum_{i=k}^{m}(c\cdot i)=c\cdot\sum_{i=k}^{m}i$$

Die Formel zeigt, daß man c von einem Summenglied "ausklammern" kann!

$i \in Z$

12.3 Summenzerlegung

$$\overbrace{\sum_{i=2}^{5}a_i}^{a}=\overbrace{\sum_{i=2}^{3}a_i}^{b}+\overbrace{\sum_{i=4}^{5}a_i}^{c}$$

Summe a = Summe b + Summe c

In Summe b wird von 2 bis 3 gezählt, in Summe c von 4 bis 5.
Das entspricht also i = 2,3,4,5 wie in Summe a.

13 Logarithmus

Pragmatisch ausgedrückt ist der Logarithmus die Umkehrfunktion der Potenz. Logarithmieren macht also Potenzieren rückgängig und umgekehrt. Meist benutzt man den Logarithmus um die Potenz „herauszufinden“. Oder anders gesagt: Um herauszufinden, wie oft die Basis (a) mit sich selbst potenziert werden muss, um das Ergebnis (c) zu erhalten?

Unmathematisch ausgedrückt:

a hoch welche Zahl (b) ergibt c?

$$a^b = c$$

Daraus folgt:

$$a^b = c \quad \Leftrightarrow \quad b = a \log c$$

> Merke:
> Logarithmus aus einer negativen Zahl ist nicht definiert!

Beispiel:

$$2^? = 8$$
$$\Rightarrow 2 \log 8 = 3$$

Wer das jetzt in seinen Taschenrechner eingegeben hat, wird vermutlich enttäuscht sein, wenn ein völlig anderes Ergebnis erscheint (nicht wundern - wir werden gleich sehen, warum :-). Etwas Problematisch ist hierbei die unterschiedliche Definition von log. Meist ist damit der Logarithmus zur Basis 10 gemeint. Gibt man z.B. in einen normalen Taschenrechner 2 log 8 ein, so erhält man nicht das Ergebnis 3, sondern den 10er Logarithmus von 8 multipliziert mit 2 (also 1,8061799…).

Was hat es damit auf sich? Was zunächst völlig verwirrend klingt, ist eigentlich gar nicht so kompliziert. Dazu muss man aber zunächst einmal wissen, was der 10er Logarithmus ist.

13.1 Log, lg oder Logarithmus zur Basis 10

Der Logarithmus mit der Basis 10 (auch log oder lg abgekürzt) wird vorwiegend zur Vereinfachung großer Zahlen benutzt. Ein praktisches Beispiel verdeutlicht das schnell:

$$10^3 = 1000$$
$$\Rightarrow 10 \log 1000 = 3$$

Hier braucht man in den Taschenrechner nur log 1000 = einzutippen, um auf das Ergebnis 3 zu kommen! Für die meisten Taschenrechner ist die Taste „log“ also eigentlich die Funktion 10 log!

Eine typische Schreibweise für sehr große Zahlen in diesem Zusammenhang ist z.B.:

$$2{,}01818729134291 \cdot 10^{12} = 2018187291342{,}91$$

13.2 Logarithmus zu beliebiger Basis

Nicht immer bringt uns der 10er Logarithmus weiter. In unserem ersten Beispiel wollten wir ja eigentlich wissen, mit welcher Zahl wir 2 potenzieren müssen (und nicht 10), um 8 zu erhalten. Doch wie berechnet man nun unser Beispiel, wenn der Taschenrechner nur die Basis 10 zulässt?
- Dazu gibt es einen simplen „Trick".

Es gilt: $a^b = c$

Mit einer einfachen Formel lässt sich b nun mit dem 10er Logarithmus berechnen:

$$b = \frac{\log c}{\log a}$$

Mit log ist in diesem Falle der 10er Logarithmus gemeint, den wir nun direkt am Taschenrechner anwenden können. Die Aufgabe

$$2^{?} = 8$$

geben wir demnach wie folgt in den Taschenrechner ein:

log 8 : log 2 =

und wir erhalten endlich die erwünschten 3!

Hinweis: Das funktioniert übrigens auch mit dem sog. natürlichen Logarithmus, meist ln genannt.

13.3 Der natürliche Logarithmus ln und die Zahl e

Der Logarithmus zur Basis e (eulersche Zahl) wird natürlicher Logarithmus (ln) genannt. Die Zahl e (hat eine ähnliche Sonderstellung wie π) entspricht dem Wert: $e = 2{,}718281828459\ldots$
Berechnet wird e durch die Funktion $(1 + 1/n)^n$, wobei n eine sehr hohe Zahl ist. Je höher n, desto näher ist das Ergebnis an e, wobei immer nur eine Annäherung (Grenzwert) erreicht werden kann.

Hier soll nur insofern darauf eingegangen werden, als dass e sich besonders zur Basis für Exponenten eignet und u.a. in der Zinsrechnung eingesetzt wird. Man spricht bei e auch von der „natürlichen Basis".

$$\ln x \quad \Leftrightarrow \quad e \log x$$

$$e^b = c \quad \Leftrightarrow \quad b = e \log c \quad \Leftrightarrow \quad b = \ln c$$

14 Folgen und Reihen

Folgen und Reihen spielen in der Finanzmathematik eine große Rolle. Sie werden u.A. für Zins- und Rentenberechnungen benötigt. Das Grundverständnis dieses Kapitels ist somit essentiell für die Lösung finanzmathematischer Aufgaben in der Klausur.

Folgen sind - grob gesagt - sich schrittweise ändernde Zahlenfolgen, die einem bestimmten Schema folgen (z.B. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, usw.). ***Reihen*** sind die Summen der einzelnen Glieder einer Folge (z.B. 1+2+4+8+16+32+64 = 127 in unserem Beispiel). Zu unterscheiden sind noch arithmetische und geometrische Reihen und Folgen, wobei sich arithmetische bei der Schrittweite stets auf einen konstanten Faktor (+ oder -) beziehen und geometrische immer auf einen Multiplikator. Mehr dazu in diesem Kapitel.

14.1 Folgen

Eine Folge ist eine Funktion, der für jede natürliche Zahl eine reelle Zahl zugeordnet ist.

a_n ist das n-te Glied einer Folge

Beispiel:

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n = n + 1$	2	3	4	5	6	7	8	...

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n = n^2 - n$	0	2	6	12	20	30	42	...

14.1.1 Die arithmetische Folge

Bei einer arithmetischen Folge ist die "Schrittweite" oder Differenz *d* immer konstant.
Im obigen Beispiel entspricht $a_n = n + 1$ einer arithmetischen Folge:

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \ldots.$$

Da die Differenz *d* konstant ist, läßt sie sich aus der Subtraktion zweier aufeinanderfolgender Glieder bestimmen:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

Ein beliebiges Glied a_n läßt sich mit folgender Formel berechnen:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Wenn wir z.B. das 5. Glied unseres Beispiels berechnen wollten würden wir einsetzen:

$$a_5 = 3 + (5-1) \cdot 1 = 3 + 4 = 7$$

Weitere Beispiele für arithmetische Folgen:

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$a_1 = 1$	$d = 2$	1	3	5	7	8	11
$a_1 = 2$	$d = 4$	2	6	10	14	18	22
$a_1 = 1$	$d = 0{,}2$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2

14.1.2 Die geometrische Folge

Bei der geometrischen Folge ist der Quotient q aller aufeinanderfolgenden Glieder konstant. Es handelt sich jedoch nicht um eine additive, sondern um eine multiplikative Konstante:

$$a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3 \xrightarrow{\cdot q} a_4 \xrightarrow{\cdot q} a_5 ....$$

Da der Quotient q konstant ist, läßt er sich durch Division zweier aufeinanderfolgender Glieder bestimmen:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Beispiel:

$a_1 = 1 \quad , q = 2$

$$1 \xrightarrow{\cdot 2} 2 \xrightarrow{\cdot 2} 4 \xrightarrow{\cdot 2} 8 \xrightarrow{\cdot 2} 16....$$

Ein beliebiges Glied a_n läßt sich mit folgender Formel berechnen:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Wenn wir z.B. das 5. Glied unseres Beispiels berechnen wollten würden wir einsetzen:

$$a_5 = 1 \cdot 2^{5-1} = 16$$

Weitere Beispiele für geometrische Folgen:

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$a_1 = 2$	$q = 3$	2	6	18	54	162	486
$a_1 = 3$	$q = 3$	3	9	27	81	243	729
$a_1 = 1$	$q = 0{,}5$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125

14.2 Reihen

Eine Reihe ist die Summe aus (der Anzahl) n Gliedern einer Folge:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Arithmetische Reihen setzen sich aus arithmetischen Folgen zusammen, geometrische Reihen aus geometrischen Folgen.

14.2.1 Die arithmetische Reihe

Beispiel für eine arithmetische Reihe:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_n
arithm. Folge	1	2	3	4	5	6	...
arithm. Reihe	1	3	6	10	15	21	...

Für ein beliebiges Glied n einer arithmetischen Reihe gilt:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Wenn wir z.B. die Reihe für das 5. Glied unseres Beispiels berechnen wollten würden wir einsetzen:

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot (1 + 5) = 15$$

Weiteres Beispiel für eine arithmetische Reihe:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
arithm. Folge	2	6	10	14	18	22
arithm. Reihe	2	8	18	32	50	72

Auch hier kann z.B. das 5. Glied durch Einsetzen in die Formel direkt berechnet werden:

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot (2 + 18) = 50$$

14.2.2 Die geometrische Reihe

Beispiel für eine geometrische Reihe:

$q = 3,\ a_1 = 3$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_n
geometr. Folge	3	9	27	81	243	729	...
geometr. Reihe	3	12	39	120	363	1092	...

Für ein beliebiges Glied n einer geometrischen Reihe gilt:

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)}$$

Diese Formel findet besonders in der Finanzmathematik (Rentenformel) Verwendung!

15 Zinsen

Zinsformeln werden für einmalige Zahlungen benutzt oder für Zahlungen, die unregelmäßig sind – im Gegensatz zu den Rentenformeln, die für regelmäßige Zahlungen herangezogen werden.

Bei der typischen Zinsrechnung erfolgt eine Einzahlung (K_0) zum Zeitpunkt x und die Auszahlung (K_E) zum Zeitpunkt y nebst Zinsen (und Zinseszinsen). Erfolgen mehrere (unregelmäßige) Einzahlungen, so berechnet man jeweils den vollen Zeitraum jeder Einzelzahlung und addiert die Endergebnisse zusammen.

Ein einfaches Beispiel:

↑	↑	↓
1.1.2000 (x) Einzahlung 1000,- €	1.1.2005 (x_2) Einzahlung 500,- €	1.1.2008 (y) Auszahlung ?

Der Zinssatz i betrage 5% (= 0,05)

Es gilt: (genauere Erklärung siehe folgende Seiten)

$$K_E = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Man berechnet nun die Zinsen für die 1000,- € bis zum 1.1.2008 (n = 8 Jahre)

$$K_E = 1000 \cdot (1+0{,}05)^8 = 1477{,}46$$

Dann berechnet man die Zinsen für die 500,- € ebenfalls bis 1.1.2008 (n = 3 Jahre)

$$K_E = 500 \cdot (1+0{,}05)^3 = 578{,}81$$

Schließlich muss man die Werte addieren und erhält den Auszahlungsbetrag zum 1.1.2008:

$1477{,}46 + 578{,}81 = 2056{,}27$

15.1 Aufzinsungsfaktor, Abzinsungsfaktor

In unserem vorherigen Beispiel wird übrigens aufgezinst, d.h. Zins und Zinseszins werden dem Anfangsbetrag hinzuaddiert. Der Bezugszeitpunkt ist in diesem Falle der 1.1.2000, also der Zeitpunkt der Einzahlung. Typischerweise benutzt man die Formel des Aufzinsungsfaktors, wenn man eine Einzahlung (Startkapital) vorgegeben hat und wissen möchte, was „am Ende“ dabei herauskommt (Endkapital).

Aufzinsen: $K_E = K_0 \cdot (1+i)^n$

Beim Abzinsen ist der Bezugspunkt der Endzeitpunkt (in unserem Beispiel der 1.1.2008) und es wird rückwärts gerechnet zum Startzeitpunkt. Typischerweise benutzt man die Formel des Abzinsungsfaktors, wenn man ein Endkapital (z.B. Auszahlung) vorgegeben hat und wissen möchte, was dazu ursprünglich eingesetzt wurde (Startkapital).

Abzinsen: $K_0 = \dfrac{K_E}{(1+i)^n}$

Hinweis: Die Abzinsungsformel wird einfach durch Umformung der Aufzinsungsformel hergeleitet.

15.2 Die wichtigsten Zinsformeln

Der Zinsgewinn (nur Zinsen!) für ein Jahr
Hinweis: hier kann man nicht hoch n rechnen!
(Aufzinsungsfaktor)

$$K_Z = K_0 \cdot i$$

Folgende Größen gelten:

K_0 = Startkapital
K_Z = Kapitalsteigerung (Zinsgewinn)
K_E = Endkapital
i = Zinssatz % (in 1/100, z.B. 5% = 0,05)
n = Jahre
t = Tage

Das Endkapital in n Jahren (hier wird Zinseszins berücksichtigt)
(Aufzinsungsfaktor)

$$K_E = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Durch Umformung findet man
das eingesetzte oder einzusetzende Startkapital
(Abzinsungsfaktor)

$$K_0 = \frac{K_E}{(1+i)^n}$$

Durch Umformung ergibt sich
der Zinssatz % (in 1/100, also z.B. 5% = 0,05)

$$i = \left(\frac{K_E}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Effektivzins pro Periode

$$i_{eff} = \frac{\Sigma Zinsen}{\Sigma Gesamtschuld}$$

Diese Formel ist z.B. relevant für Zinssätze, die auf den ursprünglichen Kaufbetrag gezahlt werden, anstatt auf die übliche Restschuld (Bei Zinsen auf Kaufbetrag ist die Zinszahlung immer gleich hoch).

Hier werden die Zinszahlungen jeder Periode und die Restschuld jeder Periode aufsummiert. Zur Berechnung der Gesamtschuld muss man die Formel der arithmetischen Reihe heranziehen, da die Restschuld sich pro Zahlungsperiode verringert.

Ergebnis i_{eff} ist dann die effektive Verzinsung pro Periode (i.d.R. Jahr, aber bei monatlichen Zahlungen pro Monat!).

Zinsgewinn (nur Zinsen!) für eine bestimmte
Anzahl Tage (t) < 365

$$K_Z = K_0 \cdot \frac{i}{365} \cdot t$$

Hinweis:
Bei Klausuraufgaben wird oftmals der Monat mit 30 und das Jahr mit 360 Tagen gerechnet. Hier muss man dann durch 360 teilen!

Endkapital für eine bestimmte Anzahl Tage (t) < 365

$$K_E = K_0 + K_0 \cdot \left(\frac{i}{365} \cdot t\right)$$

oder

$$K_E = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{365}\right)$$

16 Renten

Rentenformeln beziehen sich auf regelmäßige (sich wiederholende) Ein- oder Auszahlungen. Dabei unterscheidet man die vorschüssige und die nachschüssige Rente. Bei der nachschüssigen Rente erfolgt die Zahlung am Ende einer Periode, bei der vorschüssigen gleich am Anfang.

Typisch für die nachschüssige Rente sind regelmäßige Kreditrückzahlungen.

Die vorschüssige Rente wird typischerweise bei Sparfunktionen benutzt, da hier die Rate zu beginn einer Periode eingezahlt wird.

16.1 Nachschüssige Rente

Wie bereits erwähnt, ist das typische Anwendungsgebiet die Kreditrückzahlung, bei der die Annuitäten (Renten) gleichmäßig (am Ende einer Periode) zurückgezahlt werden.

Die Formel leitet sich von der geometrischen Reihe ab.

Einbezogen wird noch der Abzinsungsvektor:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Geometrische Reihe:

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

Folgende Größen gelten für die Formeln:

K_0 = Startkapital
K_E = Endkapital
i = Zinssatz % (in 1/100, z.B. 5% = 0,05)
a = Annuität (Rate)
n = Jahre
v = Abzinsungsvektor

Die Formel zur Berechnung des Endkapitals für die nachschüssige Rente lautet demnach:
(Typische Schuldenfunktion)

$$\boxed{K_E = a \cdot v \cdot \left(\frac{1-v^n}{1-v} \right)}$$

Durch Umformung ergibt sich die Höhe der Annuitätszahlung (Annuitätenfaktor, Rate):
(Typische Schuldenfunktion, um anhand des aufgenommenen Kapitals die Raten zu berechnen)

$$K_E = a_1 \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} \qquad \Big| \cdot (1-v)$$

$$K_E \cdot 1 - v = a_1 \cdot v \cdot (1-v^n) \qquad \Big| \div (v \cdot (1-v^n))$$

$$\boxed{a = \frac{K_E \cdot (1-v)}{v \cdot (1-v^n)}}$$

Durch Umformung ergibt sich schließlich noch die Anzahl der Perioden:
(Typische Schuldenfunktion, um die Anzahl der Raten zu berechnen)

$$K_E = a_1 \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} \qquad \left| \cdot (1-v) \right.$$

$$K_E \cdot 1 - v = a_1 \cdot v \cdot \left(1 - v^n\right) \qquad \left| \div (a_1 \cdot v) \right.$$

$$\frac{K_E \cdot 1 - v}{a_1 \cdot v} = 1 - v^n \qquad \left| -1 \right.$$

$$\frac{K_E \cdot 1 - v}{a_1 \cdot v} - 1 = -v^n \qquad \left| \cdot (-1) \right.$$

$$v^n = -\left(\frac{K_E \cdot 1 - v}{a_1 \cdot v} - 1\right) \qquad \left| \log n \right.$$

$$\boxed{n = \frac{10 \log\left(-\frac{K_E \cdot 1 - v}{a_1 \cdot v} + 1\right)}{10 \log v}}$$

16.2 Vorschüssige Rente

Die Formeln der vorschüssige Rente werden typischerweise benutzt für Sparberechnungen, wenn z.B. jemand regelmäßig (vorschüssig, also zu Beginn einer Periode) einen gleich bleibenden Betrag einzahlt und die Zinsen (und das Kapital) sich vermehren. Auch bei ratenweiser Auszahlungen eines bereits angesparten Kapitals oder dem typischen Lottogewinn auf Raten ist die vorschüssige Rente relevant (das hinterlegte Kapital bringt dann weiterhin Zinsen).

Einbezogen wird hier der Aufzinsungsvektor:

$$q = 1 + i$$

Folgende Größen gelten für die Formeln:

K_0 = Startkapital
K_E = Endkapital
i = Zinssatz % (in 1/100, z.B. 5% = 0,05)
a = Annuität (Rate)
n = Jahre
q = Aufzinsungsvektor
v = Abzinsungsvektor

Typische Sparfunktion, um das Endkapital zu berechnen

$$K_E = a \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Barwert der Einzahlungen

$$K = a \cdot \frac{1-v^n}{1-v}$$

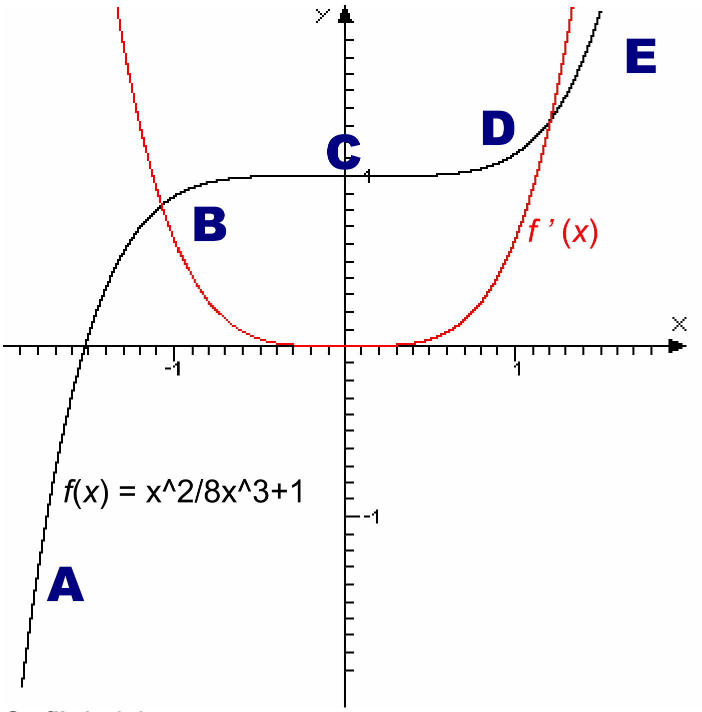
Ratenauszahlung eines Vermögens (z.B. angespartes Kapital, Lebensversicherung, Lottogewinn).

$$a = \cdot \frac{K \cdot (1-v)}{1-v^n}$$

17 Differentialrechnung, Ableitung

Unter Differenzieren versteht man – Mathematiker mögen mir verzeihen – das Bilden von „Ableitungen“ und deren Deutung. Die Ableitung einer Funktion stellt die Steigung der Funktion für jeden Punkt dar. Grob gesagt ist die Ableitung für alle Steigungen positiv und für alle Gefälle negativ (Gefälle werden auch negative Steigung genannt). Verläuft der Graph an einem Punkt der Funktion waagerecht (z.B. an einem Minimum, Maximum oder Sattelpunkt), so ist die Steigung an dieser Stelle = 0 und die Ableitung an diesem Punkt entsprechend ebenfalls 0. Die Nullstellen einer Ableitung stellen also immer mögliche Minima, Maxima oder Wendepunkte der ursprünglichen Funktion dar. Das mag zunächst alles sehr verwirrend klingen, ist bei näherer Betrachtung aber recht trivial.

Ein Beispiel soll das verdeutlichen:



Grafik 17.0.1

Die schwarze Kurve stellt unsere Funktion $f(x)$ dar. Die rote Kurve entspricht der 1. Ableitung, geschrieben $f'(x)$.

Erklärung der jeweiligen Bereiche für $f(x)$:

A: sehr starke Steigung: Ableitung ist in diesem Bereich stark positiv
B: Steigung nicht mehr so steil: Ableitung hat nur noch niedrige positive Werte
C: Der Graph ist am Wendepunkt waagerecht und hat keine Steigung mehr: Ableitung ist deshalb 0
D: Kurve steigt wieder leicht: Ableitung wird wieder positiv
E: Steigung extrem steil: Ableitung besitzt sehr hohe positive Werte

Die Funktion im Beispiel enthält der Einfachheit halber keine negativen Steigungen (Gefälle) – die Ableitung würde aber entsprechend gelten und für Gefälle in den negativen Bereich gehen.

17.1 Berechnung der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion wird durch einen Strich $f'(x)$ dargestellt. Die zweite Ableitung wird durch zwei Striche $f''(x)$, die dritte durch drei Striche, usw. dargestellt. Es gibt verschiedene Regeln, wie man die Ableitung berechnet. Auf die Herleitung sei hier bewusst verzichtet, denn das können Mathematiker besser erklären ;-)

Die Grundregel der Ableitung besteht darin, den Exponenten mit der Basis zu multiplizieren und anschließend den Exponenten um 1 zu verringern. Die übrigen Regeln sind die der Addition bzw. Subtraktion und der Multiplikation mit Konstanten. Etwas aufwändiger, sind die Produkt- und Quotientenregel. Zur Kettenregel, der Ableitung der inversen Funktion und spezieller Funktionen sei auf die einschlägigen Mathe-Webseiten verwiesen.

Zur Berechnung der Ableitung (und nicht nur da ;-) ist es von Vorteil mit der Potenzrechnung vertraut zu sein. Wer unsicher ist, sollte noch mal im 1. Teil unter Potenzen nachlesen.

Zur Erinnerung:

x^n Exponent

Basis

17.1.1 Multiplikation mit Konstanten

Die Ableitung wird gebildet, indem die Basis der Potenzen jeweils mit dem Exponenten multipliziert und der Exponent anschließend um 1 verringert wird (siehe dazu auch Beispiel nächste Seite).

$$f(y) = 2x^4$$

Die 1. Ableitung lautet:

$$f'(y) = 8x^3$$

17.1.2 Addition/Subtraktion

Besteht eine Funktion aus mehreren additiv oder substraktiv verknüpften Variablen oder Koeffizienten, so kann man für jeden einzelnen Wert die Ableitungen bilden und die Verknüpfungszeichen belassen (siehe dazu auch Beispiel nächste Seite).

$$f(y) = 2x^4 + 3x^2$$

Die 1. Ableitung lautet:

$$f'(y) = 8x^3 + 6x^1$$

Beispiel:

In der Praxis besteht eine Funktion fast immer aus einer Kombination von Multiplikation mit Kostanten und Addition/Substraktion:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 3$$

$$\text{davon die 1. Ableitung:}$$
$$f'(x) = 3 \cdot x^2 + 8x^1 - 5x^0 + (0) \cdot 3$$

$$\text{entspricht also:}$$
$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 5$$

Die 3 „wandert“ nach vorne und wird im Exponenten um eins , also auf 2 verringert.

Gleiches passiert mit der $4x^2$ (2 mal 4 ergibt 8 und der Exponent verringert sich auf 1).

Bei der $5x$ ist der (unsichtbare) Exponent ja eigentlich 1 und wird demnach 0, was laut Potenzregel die x^0 zur 1 werden lässt.

Die +3 kann man auch als 3 x^0 schreiben, da eine Zahl hoch 0 immer 1 ergibt (3 mal 1 = 3). Wandert die 0 nach vorne, so ergibt sich 0 mal 3 mal x^{-1}, was in jedem Falle 0 ergibt. – Zahlen ohne Variablen fallen in der Ableitung also grundsätzlich weg!

17.1.3 Produktregel

Die Produktregel wird angewandt für Ableitung von Funktionen, deren Elemente nicht mit Konstanten, sondern mit weiteren Variablen multipliziert werden.

Beispiel:

$$f(y) = (2x + 5) \cdot (x^2 + 3)$$

Für + und – haben wir ja schon eine Regel – für die Multiplikation mit Variablen jedoch noch nicht. Die Ableitung kann durchaus so gebildet werden, dass man zunächst die Funktion ausmultipliziert und davon die Ableitung bildet:

$$f(x) = (2x + 5) \cdot (x^2 + 3)$$
$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 15$$

$$\text{davon die 1. Ableitung:}$$
$$f'(x) = 6x^2 + 10x + 6$$

In der Praxis ist das Auflösen aber nicht immer so einfach möglich, deshalb müssen wir einen etwas anderen Weg gehen.

Hier nochmals die ursprüngliche Funktion:

$$f(x) = (2x+5)\cdot(x^2+3)$$

Nach der Produktregel wird zunächst der erste Teil der Funktion ($2x + 5$) Abgeleitet (roter Pfeil) und mit dem nicht abgeleiteten zweiten Teil der Funktion ($x^2 + 3$) multipliziert (grüner Pfeil):

$$f'(x) = (2)\cdot(x^2+3)\ldots\ldots$$

Anschließend wird der zweite Teil der ursprünglichen Funktion ($x^2 + 3$) abgeleitet (roter Pfeil) und mit dem nicht abgeleiteten ersten Teil der Funktion ($2x + 5$) multipliziert (grüner Pfeil) – und das Ganze addiert man nun zusammen:

$$f'(x) = (2)\cdot(x^2+3) \;+\; (2x+5)\cdot 2x$$

Umgeformt sieht die Ableitung dann genauso aus, wie die Ableitung der ausmultiplizieren Funktion von der vorangegangenen Seite:

$$f'(x) = 6x^2 + 10x + 6$$

17.1.4 Quotientenregel

Die Quotientenregel wird für Brüche eingesetzt und funktioniert prinzipiell ähnlich wie die Produktregel:

$$f(x) = \frac{(2x+5)}{(x^2+3)}$$

Auch hier wird jeweils der erste Teil (Zähler) abgeleitet (roter Pfeil) und mit dem nicht abgeleiteten zweiten Teil multipliziert (grüner Pfeil):

$$f'(x) = (2)\cdot(x^2+3)\ldots\ldots$$

Anschließend wird – wie bei der Produktregel – der zweite Teil (Nenner) der ursprünglichen Funktion abgeleitet (roter Pfeil) und mit dem nicht abgeleiteten ersten Teil der Funktion multipliziert (grüner Pfeil). Dieser Abschnitt wird jedoch subtrahiert!:

$$f'(x) = (2)\cdot(x^2+3) \;-\; (2x+5)\cdot 2x$$

Zuletzt wird noch der Nenner übernommen und quadriert:

$$f'(x) = \frac{(2)\cdot(x^2+3) \;-\; (2x+5)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

17.1.5 Sonstige Ableitungsregeln

Logarithmus:

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

Variable im Exponenten:

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

Variable im Exponenten:

$f(x) = e^{kx}$

$f'(x) = k \cdot e^{kx}$

$f(x) = e^{x^2} = e^{x \cdot x}$

$f'(x) = 2 \cdot e^{x^2}$

Variable im Exponenten:

$f(x) = a^x$

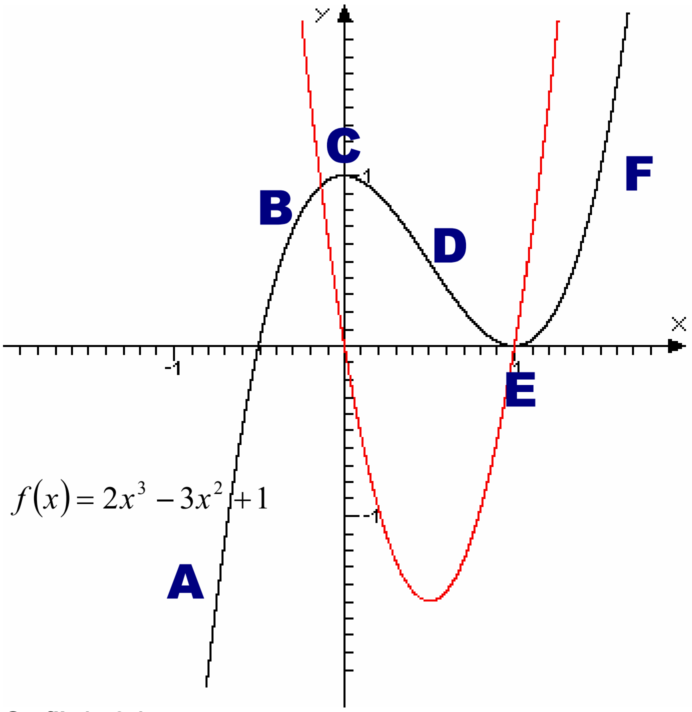
$f'(x) = \ln a \cdot a^x$

17.2 Extremwerte

Als Extremwerte bezeichnet man Minima und Maxima. Ein Minimum ist der tiefste Punkt einer Kurve (Tal), ein Maximum der höchste Punkt (Gipfel).

Wie wir bereits zu beginn des Kapitels gesehen haben, ist an diesen Punkten die Steigung gleich null. Da die erste Ableitung die Steigung der eigentlichen Funktion anzeigt, wird genau an jenen Punkten (Minima, Maxima), die Ableitung die x-Achse berühren, also eine Nullstelle haben.

Betrachten wir die folgende Grafik:



Grafik 17.2.1

Die schwarze Kurve stellt unsere Funktion $f(x)$ dar, die rote Kurve die 1. Ableitung $f'(x)$.

Wie wir sehen, besteht eine hohe positive Steigung im Bereich (A), was sich in sehr hohen positiven Werten der Ableitung widerspiegelt. Im Bereich (B) flacht die Kurve zusehends ab, hat also keine hohe Steigung mehr und die Werte der Ableitung werden zusehends kleiner. In (C) ist schließlich die Steigung unserer Funktion auf 0 gefallen – die Kurve geht weder nach oben, noch nach unten. Und genau an dieser Stelle ist die Ableitung ebenfalls 0! Danach fällt die Kurve immer stärker ab, was zu immer höheren negativen Werten in der Ableitung führt (negative Steigung!), um dann ab (D) wieder langsamer zu fallen (Wendepunkt). Der Punkt (D) beschreibt die stärkste (negative) Steigung, was sich in einem Maximalausschlag (in diesem Falle ein Minimum) in der Ableitung widerspiegelt. Im Punkt (E) hat unsere Funktion ein Minimum, an deren Punkt die Steigung 0 ist und die Ableitung entsprechend die x-Achse schneidet (Nullstelle der Ableitung). Es ist übrigens reiner Zufall, dass die Funktion ebenfalls die x-Achse an dieser Stelle schneidet! Schließlich steigt die Kurve in (F) wieder stark an, was sich ebenfalls in einer sehr hohen Steigung und somit in hohen positiven Werten der Ableitung bemerkbar macht.

Wer das zum ersten Mal liest, wird sich jetzt vermutlich erst mal einen Tee machen wollen, denn das muss sich erst mal setzen…. ;-)

17.2.1 Minimum, Maximum

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Ableitung jedes Mal 0 ergibt, wenn die Funktion ein Maximum oder ein Minimum hat. Daraus lässt sich schließen, dass man lediglich die Nullstellen der Ableitung finden muss, um ein Minimum oder ein Maximum für eine Funktion zu finden. Und tatsächlich werden wir das ganze jetzt rechnerisch nachvollziehen:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

Berechnen wir nun die Nullstellen der Ableitung, indem wir die Ableitung mit 0 gleichsetzen:

$$6x^2 - 6x = 0 \qquad | \div 6$$
$$\Rightarrow x^2 - 1x = 0$$

$$\text{pq - Formel!}$$
$$\Rightarrow x^2 - 1x + 0 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 0}$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Da diese Werte immer potentielle „Kandidaten“ für Minima und Maxima sind, nennt man sie auch „kritische“ Werte.

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 0$$

Die Nullstellen entsprechen also exakt den Nullstellen in der Grafik und auch den Punkten des Minimums und des Maximus der ursprünglichen Funktion!

Will man nun noch genauer wissen, welche Nullstelle ein Minimum und welche ein Maximum ist, muss man den Verlauf der Ableitung betrachten. In unserer Grafik sehen wir sehr deutlich, dass dort, wo unser Funktionsmaximum ist, die Steigung der Ableitung von positiv nach negativ verläuft (die Ableitungskurve verläuft von oben nach unten). Die Steigung der Ableitung ist an dieser Stelle also negativ, weil die ursprüngliche Funktion von positiv steigend nach fallend gewechselt hat (was nur bei einem Maximum der Fall sein kann!).

Dort, wo unser Funktionsminimum ist, kommt die Ableitungskurve aus dem negativen Bereich in den positiven Bereich, ist also positiv steigend (die Ableitungskurve verläuft dort von unten nach oben).

Es lässt sich also sagen (dies ist kein Beweis, soll uns an dieser Stelle aber genügen), dass

- **ein Maximum vorliegt, wenn die Steigung an der Nullstelle der Ableitung negativ ist**
- **ein Minimum vorliegt, wenn die Steigung an der Nullstelle der Ableitung positiv ist**

Um die Steigung der Ableitung rechnerisch zu ermitteln muss man nur die Ableitung der Ableitung (also die 2. Ableitung) bilden und die Steigung für die fraglichen Punkte (die sog. „kritischen“ Werte - in unserem Falle also 0 und 1) durch einsetzen prüfen:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$
$$\Rightarrow f''(x) = 12x - 6$$

Setzt man nun für x die „kritischen“ Werte 0 und 1 in die 2. Ableitung ein, so ergibt sich:

$$f''(x) = 12 \cdot (0) - 6 = -6 \qquad \Rightarrow \text{Steigung negativ} = \text{Maximum}$$
$$f''(x) = 12 \cdot (1) - 6 = 6 \qquad \Rightarrow \text{Steigung positiv} = \text{Minimum}$$

Regel für Minimum und Maximum:

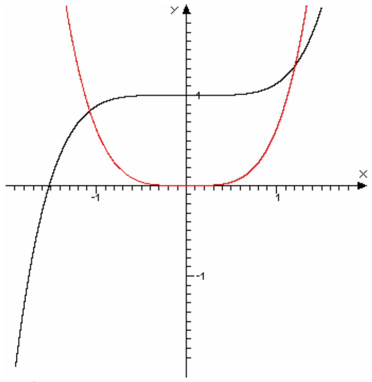
$$f'(x) = 0$$
$$f''(x) \neq 0$$

Genauer:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$
$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

17.2.2 Sattelpunkt

Es gibt noch den Sonderfall, bei dem 0 herauskommt, wenn man einen kritischen Wert in die 2. Ableitung (s.o.) einsetzt. Das bedeutet dann, dass auch die Steigung der Ableitung 0 ist, also keine Steigung existiert. Wenn die Steigung der Funktion und die Steigung der 1. Ableitung 0 ist, dann handelt es sich um einen **Sattelpunkt**. Dies ist z.B. bei der Funktion der Fall, die wir ganz zu Beginn des Kapitels gesehen haben (siehe Grafik 17.2.2). Dort ist für den Punkt $x = 0$ sowohl die Steigung der Funktion, als auch die Steigung der Ableitung Null.



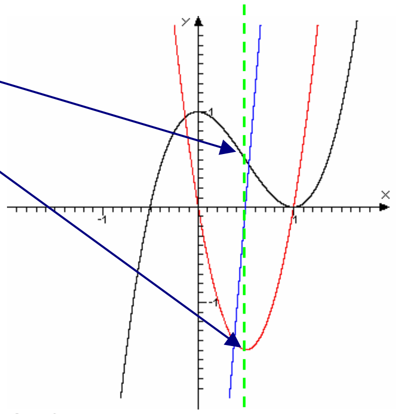
Grafik 17.2.2

Regel für Sattelpunkt:

$$f'(x) = 0$$
$$f''(x) = 0$$

17.2.3 Wendepunkt

Bei einem Wendepunkt existiert immer die höchst mögliche Steigung (oder wie hier: Gefälle). Deshalb zeigt die Ableitung einer Funktion (= rote Linie) an dieser Stelle immer ein Maximum oder (wie hier) Minimum. Will man den Wendepunkt einer Funktion bestimmen, muss man also nur das Maximum oder Minimum der entsprechenden Ableitung bestimmen! Wir müssen also die Ableitung der Ableitung bilden (2. Ableitung = blaue Linie) um die kritischen Werte der Ableitung zu finden und diese dann in die 3. Ableitung einsetzen. Vom Prinzip her funktioniert das genau so, wie bei den Minima und Maxima der Funktion, nur dass man hier eine Ableitung „tiefer“ schaut.



Grafik 17.2.3

In unserem Beispiel ist die 3. Ableitung einfach zu bestimmen und es gibt nicht mal Werte für x einzusetzen. Die Funktion ist also immer = 12. Sie würde in unserer Grafik irgendwo ganz oben parallel zur x-Achse verlaufen und hätte demnach keine Steigung. Dennoch ist das Ergebnis der Funktion positiv, was einem Minimum in der 1. Ableitung entspricht. Es bestünde auch ein Wendepunkt, wenn hier ein negativer Wert herauskäme – das würde dann einem Maximum in der 1. Ableitung entsprechen. Da es für einen Wendepunkt unrelevant ist, ob in der Ableitung ein Minimum oder Maximum besteht, genügt es also zu prüfen, ob bei der 3. Ableitung ein positiver oder negativer Wert herauskommt.

$$f''(x) = 12x - 6$$
$$\Rightarrow f'''(x) = 12$$

Wenn hier 0 herauskommt (und das ist der Grund, warum wir die 3. Ableitung überhaupt ausrechnen), würde es sich in der 1. Ableitung um einen Sattelpunkt handeln, was nicht auf einen Wendepunkt in der Ursprungsfunktion hinweist!

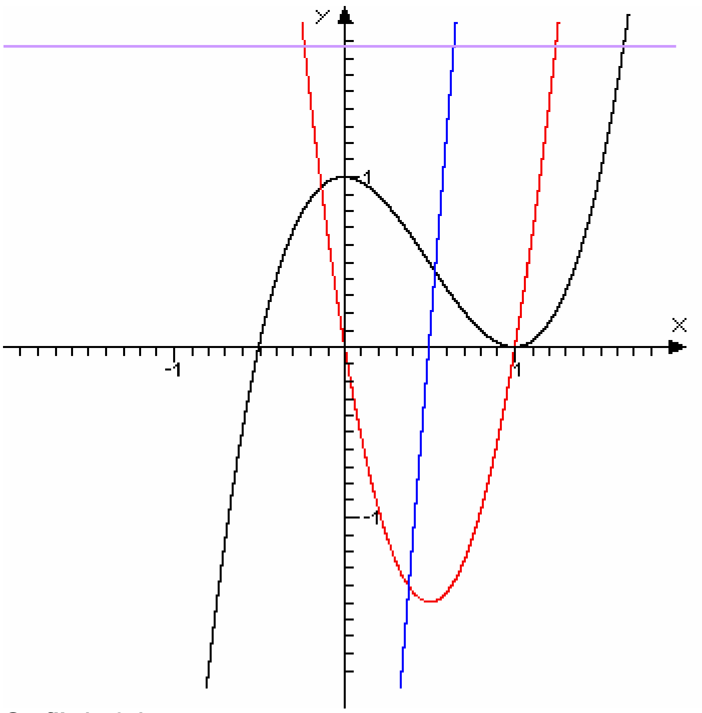
Regel für Wendepunkt:

$$f''(x) = 0$$
$$f'''(x) \neq 0$$

17.3 Verlauf der Ableitungsgraphen

Hier möchte ich noch mal kurz die einzelnen Verläufe der Ableitungen zusammenfassen. Wenn man verstanden hat, wie die einzelnen Graphen voneinander abhängen, kann man sich die entsprechenden Rechenwege nämlich immer sehr leicht selbst konstruieren.

Gemäß den Regeln zur Ableitung werden die Polynome immer weiter reduziert. Die entsprechenden Steigungen werden dadurch auch immer „simpler". Die einfachste Steigung besteht bei einem Polynom 1. Grades, also bei einer einfachen x-Funktion. Danach (also bei der Ableitung einer solchen einfachen x-Funktion) gibt es nur noch eine weitere Ableitung mit einer „flachen" Linien, die irgendwo parallel zur x-Achse verläuft (weil die Steigung der x-Funktion ja konstant, also =0 ist!).



Grafik 17.3.1

Hier nochmals die Funktion aus unserem vorherigen Beispiel:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$	(schwarz)
$f'(x) = 6x^2 - 6x$	(rot)
$f''(x) = 12x - 6$	(blau)
$f'''(x) = 12$	(lila*)

* die Funktion zur 3. Ableitung (lila) ist aus Gründen der Übersichtlichkeit weiter unten eingezeichnet. Sie müsste natürlich bei y = 12 verlaufen!

Erklärung der Verläufe:

Schwarz: Polynome 3. Grades (x^3) verlaufen meist Wellenförmig, ähnlich einer Sinuskurve
Rot: Polynome 2. Grades (x^2) verlaufen (grob gesagt) wie eine Parabel
Blau: Polynome 1. Grades (x) haben eine konstante Steigung und sind einfache Linien
Lila: Eine „Funktion" mit Konstanten verläuft immer parallel zur x-Achse, da keine Steigung besteht